

Міністерство освіти і науки України

**Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки та  
сільськогосподарських машин*

# ***ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА***

## **НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК**

для практичних та індивідуальних занять  
(самостійної роботи)

для студентів спеціальності

**141 Електроенергетика, електротехніка та  
електромеханіка**

Тернопіль  
2019

**УДК 531.8**  
**ББК 30.12**  
**Х 76**

**Автори:**

**Н.І. Хомик**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин  
**А.Д. Довбуш**, старший викладач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин  
**М.І. Цепенюк**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин  
**А.В. Бабій**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

**Рецензенти:**

**Андрійчук В.А.** доктор технічних наук, професор, професор кафедри електричної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя  
**Павх І.І.** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри машинознавства та транспорту Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

*Розглянуто на засіданні кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин, протокол № 1 від 27.08.2019 р.*  
*Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету інженерії машин, споруд та технологій, протокол № 1 від 30.08.2019 р.*  
*Рекомендовано до друку та використання у навчальному процесі на засіданні науково-методичної ради університету, протокол № 2 від 19.11.2019 р.*  
*Рекомендовано до друку та використання у навчальному процесі на засіданні Вченої ради університету, протокол № 10 від 28.11.2019 р.*

**Хомик Н.І.**

**Х 76** Технічна механіка: навчально-методичний посібник для практичних та індивідуальних занять (самостійної роботи) / Н. І. Хомик, А. Д. Довбуш, М. І. Цепенюк, А. В. Бабій. – Тернопіль: Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. – 120 с.

Посібник розроблено відповідно до навчальної програми і призначено для практичних та індивідуальних занять з дисципліни «Технічна механіка» для студентів спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. У посібнику стисло викладено основний матеріал до теми кожної задачі, наведено умови задач і приклади розв'язування. Також вміщено умови до вибору привода для проектування і приклади розрахунку з необхідними довідковими даними. Посібник рекомендовано також для самостійної роботи студентів, оскільки він вміщує короткі теоретичні викладки основного матеріалу дисципліни «Технічна механіка», умови завдань, приклади їх розв'язування, необхідні довідкові дані.

**УДК 531.8**  
**ББК 30.12**

©Хомик Н.І., Довбуш А.Д.,  
Цепенюк М.І., Бабій А.В.  
2019

# ЗМІСТ

	стр.
ВСТУП .....	5
Вказівки до вибору завдання та правила оформлення .....	6
<b>1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ .....</b>	<b>8</b>
<b>Задача №1.</b> Визначення реакцій опор балки .....	13
<b>Задача №2.</b> Визначення реакцій защемлення .....	16
Приклад розв'язування задачі 1. Визначення реакцій опор балки .....	19
Приклад розв'язування задачі 2. Визначення реакцій защемлення .....	20
<b>Задача №3.</b> Визначення реакцій в опорах рами .....	22
Приклад розв'язування задачі 3. Визначення реакцій в опорах рами .....	27
<b>2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ .....</b>	<b>29</b>
<b>3. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ .....</b>	<b>34</b>
<b>Задача №4.</b> Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску .....	38
Приклад розв'язування задачі №4. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску .....	41
<b>4. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕТИНУ .....</b>	<b>44</b>
<b>Задача №5.</b> Розрахунок вала на кручення .....	47
Приклад розв'язування задачі №5. Розрахунок вала на кручення .....	50
<b>5. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН .....</b>	<b>54</b>
<b>Задача №6.</b> Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі .....	62
<b>Задача №7.</b> Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах .....	62
Приклад розв'язування задачі №6. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі .....	63
Приклад розв'язування задачі №7. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах .....	66

<b>6. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ .....</b>	<b>69</b>
<b>Задача №8.</b> Розрахунок на стійкість стисненого стержня .....	75
Приклад розв'язування задачі №8. Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	77
<b>7. ГНУЧКІ НИТКИ.....</b>	<b>81</b>
<b>Задача №9.</b> Визначення стріли провисання електропроводу .....	89
Приклад розв'язування задачі №9. Визначення стріли провисання електропроводу .....	90
<b>8. ЕНЕРГО-КІНЕМАТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ПРИВОДА.....</b>	<b>92</b>
8.1. Енерго-кінематичні параметри на приводному валу .....	92
8.2. Тип електродвигуна і його швидкохідність .....	93
8.3. Склад передач і кінематична схема привода .....	94
8.4. Вибір типорозміру електродвигуна .....	95
8.5. Загальне передаточне відношення привода .....	96
8.6. Розподіл загального передаточного відношення привода .....	96
8.7. Потужність, моменти і частоти обертання на валах привода ...	97
<b>ТИПОВІ СХЕМИ ЗАВДАНЬ НА ПРОЕКТУВАННЯ ПРИВОДА .....</b>	<b>99</b>
<b>Приклад енерго-кінематичного розрахунку привода .....</b>	<b>105</b>
Перелік використаної та рекомендованої літератури .....	109
Додатки .....	110

## ВСТУП

Методичний посібник призначений для студентів спеціальності 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” при вивченні дисципліни “Технічна механіка”. Він може бути використаний студентами інших спеціальностей, які вивчають таку ж або споріднені дисципліни (“Механіка”, “Прикладна механіка”). Посібник включає питання теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин і складається із восьми розділів, у яких викладені основні положення цих курсів.

У розділі “Основні положення механіки” висвітлені поняття про силу, момент, навантаження, в’язі, умови статичної рівноваги. Приведені завдання і розв’язки задач на визначення опорних реакцій в балках і рамах.

Розділ “Основні поняття опору матеріалів” містить поняття про міцність, жорсткість і стійкість конструкцій, основні види деформацій, внутрішні силові фактори і метод їх визначення. У розділі детально розглянуті основні види деформацій: розтяг-стиск, кручення, прямий поперечний згин та стійкість центрально-стиснутих стержнів. Особливу увагу для майбутніх спеціалістів з електротехніки заслуговує питання розрахунку гнучких ниток, яке детально висвітлене в посібнику з точки зору розрахунку на міцність і визначення провисання.

У розділі “Енерго-кінематичний розрахунок привода” висвітлені питання визначення енерго-кінематичних параметрів на приводному валу, вибору схеми привода і типорозміру електродвигуна, розподілу загального передаточного відношення приводу.

Крім теоретичної частини, для кожної теми матеріалу в посібнику приведені варіанти завдань для самостійної роботи студентів і приклади розв’язування задач.

Посібник рекомендовано викладачам для використання при проведенні практичних занять і студентам при виконанні індивідуальних завдань. Метою виконання індивідуального завдання з даної дисципліни є набуття студентами практичних навиків із розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість елементів машин та споруд, вибору типу і складу приводів технологічних машин. Індивідуальне завдання є невід’ємною частиною підготовки студентів до дипломного проектування і майбутньої інженерної діяльності.

Індивідуальне завдання містить 4...5 задач (за вибором викладача) із 9 запропонованих та розрахунок і конструювання приводу, що складається з електродвигуна й механічних передач.

У додатках наведено довідкові матеріали, необхідні для виконання індивідуального завдання. Все це сприятиме поглибленню вивчення курсу та самостійному виконанню завдання.

## **Вказівки до вибору завдання**

Індивідуальне завдання студенти вибирають за двома останніми цифрами номера залікової книжки: номер розрахункової схеми – за останньою цифрою; варіант (з таблиці умови задачі) – за передостанньою.

## **Об'єм, структура і вказівки до виконання індивідуального завдання**

Індивідуальне завдання з технічної механіки містить 4...5 задач із 9 запропонованих, які охоплюють розрахунок елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість, а також енерго-кінематичний розрахунок привода.

Титульну сторінку виконувати креслярським шрифтом або машинописним (комп'ютерним) способом на відповідному бланку.

Перша сторінка індивідуального завдання – титульна (*додаток 1*), друга – зміст, який включає перелік виконаних завдань (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додаток 2*); далі – умови задач (аркуш з кутовим штампом 40мм, *додаток 3*), розв'язки задач (аркуші з кутовим штампом 15 мм, *додаток 4*); завдання на енерго-кінематичний розрахунок привода (аркуш з кутовим штампом 40 мм); підбір електродвигуна та визначення передаточного числа привода (аркуші з кутовим штампом 15 мм) і список використаних літературних джерел (аркуш із кутовим штампом 40 мм).

Текст завдання викладати послідовно, лаконічно, розрахунки супроводжувати короткими поясненнями з посиланням на відповідний рисунок (*додаток 5*). Стил ь викладу тексту повинен бути коротким, чітким і без двоякого змісту. Прийнята у тексті термінологія повинна відповідати встановленій у стандартах або загальноприйнятій у науково-технічній літературі.

Текст завдання розміщувати з одного боку аркуша формату А4 (297х210 мм). Відстань від рамки до границь тексту зліва і справа повинна бути не менше 5 мм, зверху і знизу – 10 мм (*додаток 4*). Абзаци у тексті починати відступом, що дорівнює п'яти символам основного тексту. Текст виконувати комп'ютерним (машинописним) способом через 1,5 інтервала чітким шрифтом висотою не менше 2,5 мм (14pt, шрифт Times New Roman) або рукописним – чорним чорнилом основним креслярським шрифтом висотою букв і цифр не менше 2,5 мм. Допускається індивідуальне завдання виконувати чітким розбірливим рукописним текстом чорним чорнилом.

Усі сторінки індивідуального завдання, крім титульної, повинні мати рамки з кутовим штампом. У кутових штампах для змісту й умов задач (рис. 1а) записувати назву задачі, наприклад, «Визначення реакцій опор балки» і позначення записки ІЗ ТМ (індивідуальне завдання з технічної механіки), до якого входить номер залікової книжки студента, наприклад, ІЗ ТМ 19-188.00.00. У кутових штампах (рис. 1б) для решти сторінок записувати тільки позначення завдання і нумерацію аркушів. Номер сторінки проставляти у відповідній графі штампа (рис. 1). Відлік починати з титульної сторінки, але номер її на титульній не ставити. Нумерація сторінок – наскрізна до додатків. Додатки (при потребі) нумерувати окремо і вшивати в кінці завдання.

Формули у тексті записувати з нової стрічки у загальному вигляді, а під формулою наводити пояснення кожного символу із зазначенням величини й розмірності. Обчислення формул проводити у такій послідовності: записування шуканої величини в буквенному виразі, підстановка відповідних цифрових значень і записування кінцевого результату з проставленням розмірностей.

Усі схеми (рисунок) при виконанні індивідуального завдання оформляти на окремій сторінці чи двох, за необхідності, з дотриманням послідовності, передбаченої ходом розв’язування. Рисунок нумерувати відповідно до номера задачі й супроводжувати підписами (додатки 4, 5).

					ІЗ ТМ 19-188.00.00			
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	Визначення реакцій опор балки	Літ.	Арк.	Аркушів
Розроб.	Олійник В.І.							
Перевір.	Цепенюк М.						2	8
Консульт.						ФПТ, ЕТ-21		
Н. контр.								
Затв.								

а)

					ІЗ ТМ 19-188.00.00			Арк.
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата				5

б)

Рисунок 1 – Приклад заповнення кутових штампів:

а) штамп для розділу (умови задачі);

б) штамп для наступних сторінок тексту

# 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ

## Поняття про силу й момент

Сила – це величина, що є мірою механічної взаємодії матеріальних тіл.

Сила, що діє на тіло, – вектор. Сила характеризується точкою прикладання, напрямом і величиною. Позначають силу –  $\vec{F}$  ( $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}$ ), одиниця вимірювання – Ньютон. 1 Н – це така сила, яка масі в 1 кг надає прискорення 1 м/с<sup>2</sup>.

Проекція сили на вісь – це величина алгебраїчна, яка може бути як додатною, так і від'ємною, що встановлюється за напрямом проекції – напрямом від проекції початку до проекції кінця вектора сили.

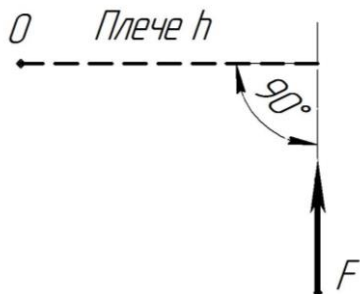
### **Правило знаків:**

Якщо напрям проекції сили на вісь співпадає з додатним напрямом осі, то ця проекція вважається додатною, і навпаки.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проектується на вісь у натуральну величину.

Якщо вектор сили перпендикулярний до осі, то його проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Поняття моменту сили відносно точки ввів Леонардо да Вінчі.



**Момент сили відносно точки – це добуток модуля сили на її плече** (рис. 1.1)

$$M_0(F) = F \cdot h.$$

Обертова дія сили характеризується моментом. Точку, відносно якої беруть момент, називають **центром моменту**.

Рисунок 1.1

**Плече сили** відносно точки – це найкоротша відстань від центра моменту до лінії дії сили. Одиниця вимірювання моменту сили – Нм.

Одна і та ж сила відносно різних точок може давати «+» і «-» момент.

Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії цієї сили, дорівнює нулю, так як плече у цьому випадку дорівнює нулю.

Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж лінії її дії, так як модуль сили і плече залишаються незмінними.

Дві різні системи сил прийнято вважати **еквівалентними**, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушуючи стану вільного твердого тіла.



Одну силу, еквівалентну даній системі сил, називають **рівнодієюю**, а сили цієї системи – складовими рівнодієюю. Силу, яка зрівноважує дану систему сил, називають **зрівноважувальною** цієї системи.

Рівнодіяна і зрівноважувальна сили однієї й тієї ж системи рівні за модулем і діють уздовж однієї прямої у протилежні сторони.

### Класифікація зовнішніх навантажень

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

**Статичні** – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

**Динамічні** – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

2. За характером прикладання (рис. 1.2):

а)  $F$ ,  $Q$ ,  $R$  – зосереджені сили [Н, кН, МН];

б)  $M$ ,  $T$  – зосереджені моменти [Нм, кНм, МНм];

в)  $q$  – розподілені на лінії [Н/м, кН/м].

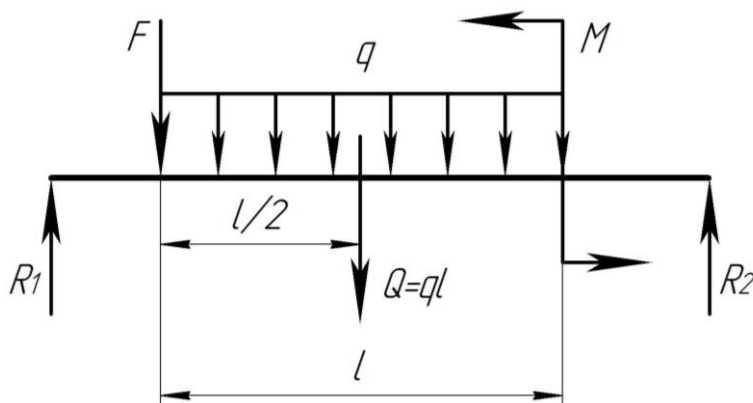


Рисунок 1.2

Сили, які прикладені до площадки, розмірами якої нехтують, називають **зосередженими**. Якщо сили прикладені вздовж лінії, на поверхні тіла або об'єму, наприклад, сила тяжіння, сила вітру або води і т.п., то їх називають **розподіленими**.

Плоска система розподілених сил характеризується інтенсивністю розподілу по довжині (або лінії) й позначається  $q$ , одиниця вимірювання – Н/м. Розподілене навантаження, що має постійну інтенсивність, – це рівномірно розподілене навантаження (див. рис. 1.2).

При розв'язуванні задач статички розподілене навантаження замінюють рівнодієюю силою. Модуль рівнодієюю сили рівномірно розподіленого навантаження  $Q = q \cdot l$ . Прикладена рівнодіяна сила посередині довжини розподілення.

## В'язі та реакції в'язей. Принцип звільнення

**В'язі** – це обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла у просторі.

Сила, з якою тіло діє на в'язь, називають силою тиску; сила, з якою в'язь діє на тіло, називають силою реакції або просто реакцією. Згідно з аксіомою взаємодії ці сили рівні за модулем і діють на одній прямій у протилежні сторони. Сили реакції і тиску прикладені до різних тіл, тому не є системою сил.

Сили, що діють на тіло, поділяють на **активні й реактивні**. Активні сили намагаються переміщувати тіло, до якого вони прикладені. Реактивні сили протидіють цьому переміщенню. Принципова різниця активних і реактивних сил – величина реактивних сил залежить від величини активних, але не навпаки. Активні сили називають **навантаженнями**.

При розв'язуванні задач статички невільне тіло умовно зображають як вільне з допомогою **принципу звільнення**.

**Принцип звільнення** – всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, замінивши їх реакціями.

У результаті використання цього принципу отримують тіло, що перебуває під дією деякої системи активних і реактивних сил.

**Правило для визначення напрямку реакції в'язі.** Напрямок реакції в'язі протилежний напрямку переміщення, яке ця в'язь забороняє.

Найпоширеніші в'язі за будовою можна розділити на три основні типи (рис. 1.3):

- шарнірно-рухома опора (опора  $A$ );
- шарнірно-нерухома опора (опора  $B$ );
- жорстке закріплення або защемлення (опора  $C$ ).

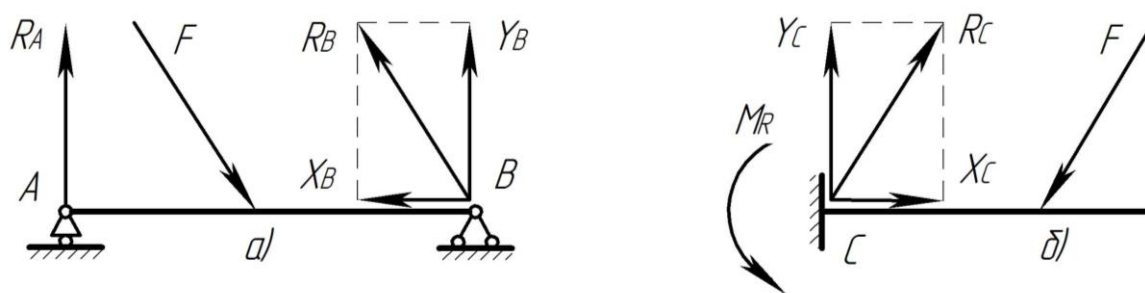


Рисунок 1.3

**Шарнірно-рухома опора** (див. рис. 1.3а). Реакція такої в'язі завжди направлена перпендикулярно опорній площині й невідома тільки за модулем (одна невідома).

**Шарнірно-нерухома опора** (див. рис. 1.3а). Реакція такої в'язі направлена перпендикулярно осі шарніра; модуль і напрям її невідомі (*дві невідомі*). При розв'язуванні задач таку реакцію розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові, невідомі за модулем, але відомі за напрямом.

**Жорстке закріплення (защемлення)** не допускає ні лінійних переміщень, ні поворотів защемленого кінця балки (див. рис. 1.3б). Жорстке защемлення замінюють реактивною силою, невідомою за модулем і напрямом, і реактивним моментом (*три невідомі*). Реактивну силу, невідому за напрямом, розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові.

Якщо при розв'язуванні задач реактивна сила або реактивний момент отримують із від'ємним знаком, то дійсний їх напрям протилежний прийнятому на рисунку.

### Умови рівноваги плоскої системи сил

Для рівноваги плоскої *системи довільно розташованих сил* необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил на осі координат  $X$ ,  $Y$  дорівнювали нулю і щоб алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

Умови рівноваги, записані у вигляді рівнянь, що містять невідомі величини, називають *рівняннями рівноваги*:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

При розв'язуванні деяких задач доцільно замість одного рівняння проекцій складати рівняння моментів. Якщо замінити одне рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил мають вигляд

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

Ці умови є недостатніми для рівноваги, якщо центри моментів  $A$  і  $B$  лежать на одному перпендикулярі до осі  $X$ , оскільки система сил має рівнодійну, яка проходить через ці точки і тому не може бути у рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил можна записати у вигляді

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

Ці умови є недостатніми для рівноваги, якщо центри моментів  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій. Система сил може мати рівнодійну, яка проходить через ці точки, і тому не може бути у рівновазі.

Умови рівноваги плоскої *системи паралельних сил*: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

$$\sum F_i = 0; \quad \sum M = 0.$$

Умови рівноваги плоскої *системи збіжних сил*: для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій цих сил на кожну із двох координатних осей дорівнювала нулю.

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Усі види аналітичних умов рівноваги дійсні для будь-яких прямокутних осей координат, тому під час розв'язування задачі або її перевірки осі можна змінювати, тобто одні рівняння проекцій сил складати для однієї системи координат, інші – для нової системи координат.

При розв'язуванні задач статички аналітичним способом доцільно складати рівняння рівноваги так, щоб у кожному з них була тільки одна невідома величина. Для цього необхідно раціонально вибрати осі координат і центри моментів.

***Порядок розв'язування задач статички:***

- 1) вибирають тіло, рівновагу якого будуть розглядати;
- 2) відкидають в'язі, замінюючи їх реакціями, і встановлюють, яка система сил діє на тіло;
- 3) використовуючи умови рівноваги, знаходять невідомі величини.

## Задача №1

### Визначення реакцій опор балки

Горизонтальна балка довжиною  $l$  встановлена на опорах  $B$  і  $C$  (риунок до задачі 1) і навантажена зосередженою силою  $F$ , розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$ , парою сил з моментом  $M$  (таблиця до задачі 1). Не враховуючи силу ваги балки, визначити реакції опор  $B$  і  $C$ .

#### *План розв'язування задачі:*

1. Відкинути опори, замінивши їх дію реакціями.
2. Записати рівняння рівноваги балки.
3. Визначити реакції опор.
4. Перевірити правильність розв'язку.

*Таблиця до задачі 1*

№ з/п	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	$l$ , м
<b>1</b>	20	20	30	8
<b>2</b>	30	30	25	12
<b>3</b>	10	25	35	10
<b>4</b>	20	10	40	8
<b>5</b>	30	30	25	12
<b>6</b>	10	35	20	10
<b>7</b>	20	20	30	8
<b>8</b>	30	25	35	12
<b>9</b>	10	15	40	6
<b>0</b>	10	40	20	10

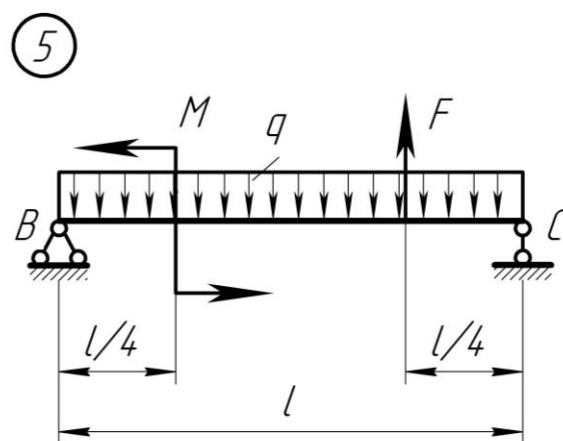
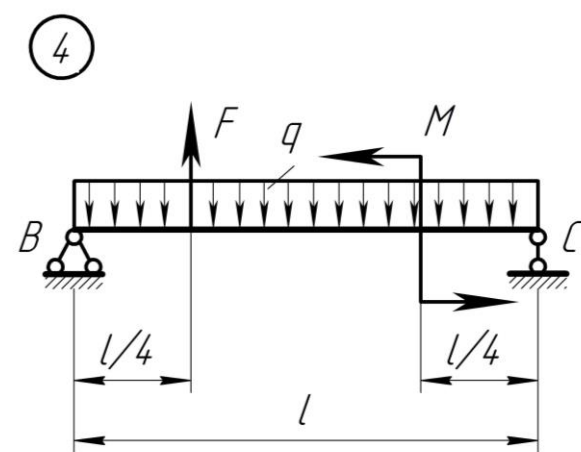
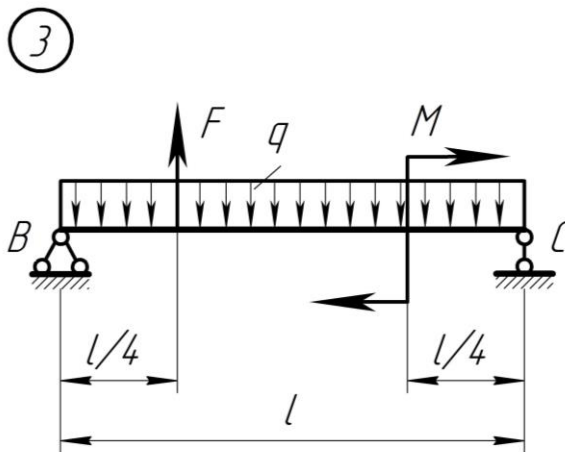
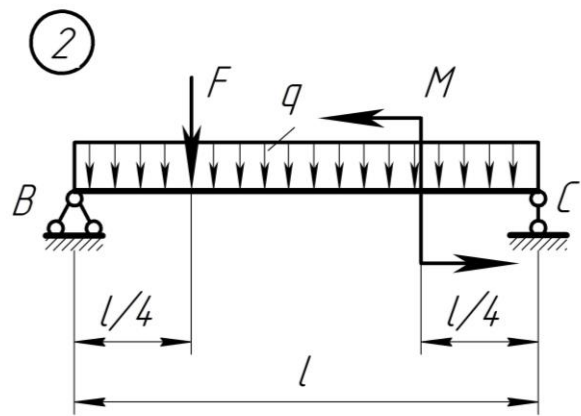
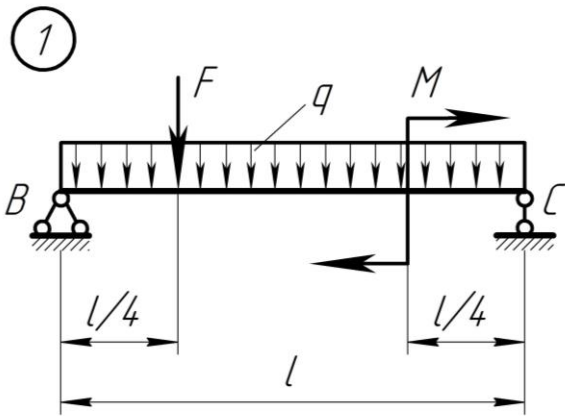


Рисунок до задачі 1

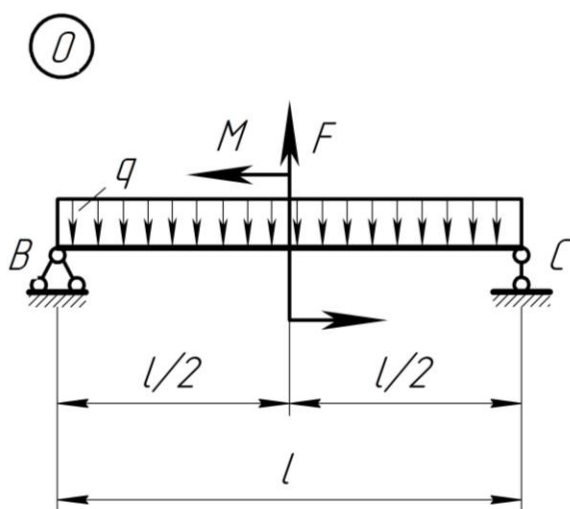
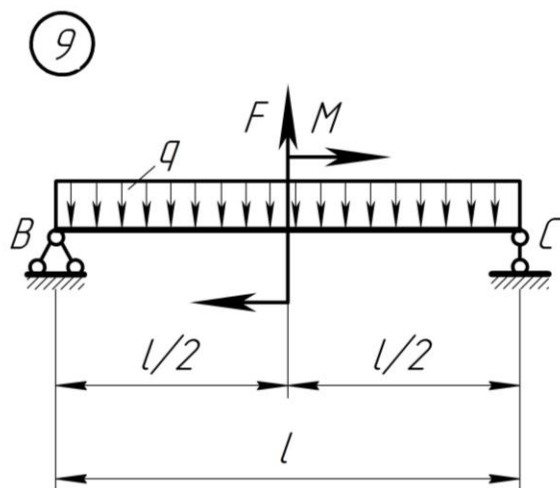
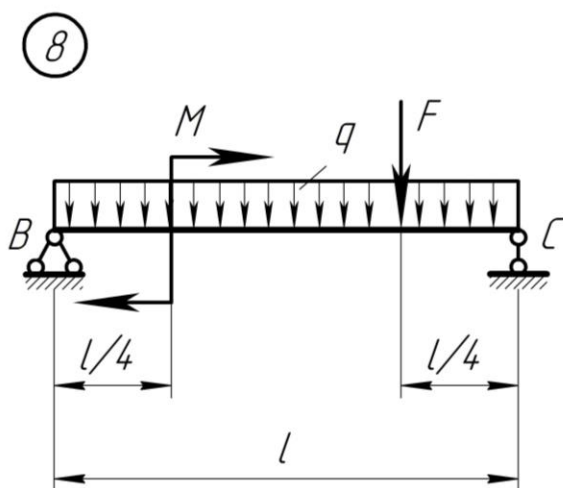
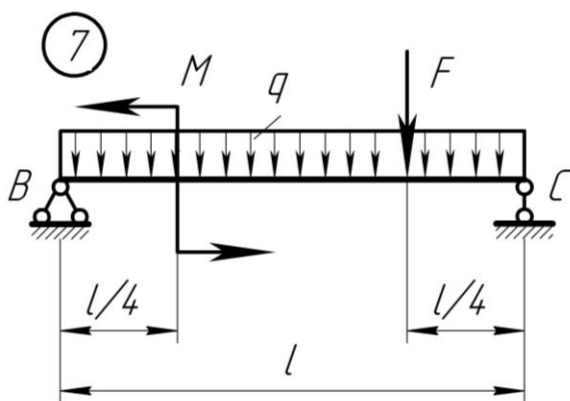
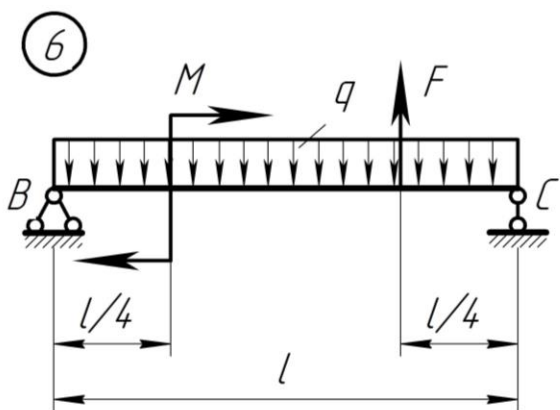


Рисунок до задачі 1 (закінчення)

## Задача №2

### Визначення реакцій защемлення

Консольна балка (рисунок до задачі 2) довжиною  $l$  навантажена зосередженою силою  $F$ , розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$ , парою сил з моментом  $M$  (таблиця до задачі 2). Не враховуючи силу ваги консолі, визначити реакцію защемлення.

#### *План розв'язування задачі:*

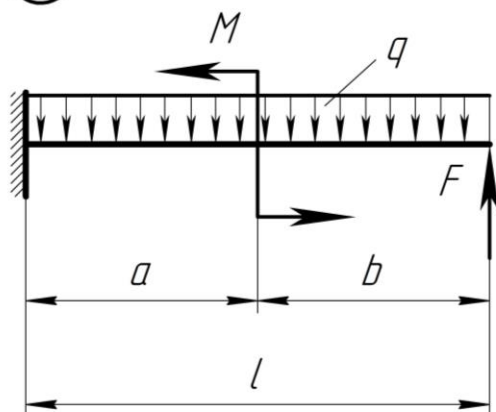
1. Відкинути защемлення, замінивши його дію реакціями.
2. Записати рівняння рівноваги балки.
3. Визначити реакції защемлення.
4. Перевірити правильність розв'язку.

*Таблиця до задачі 2*

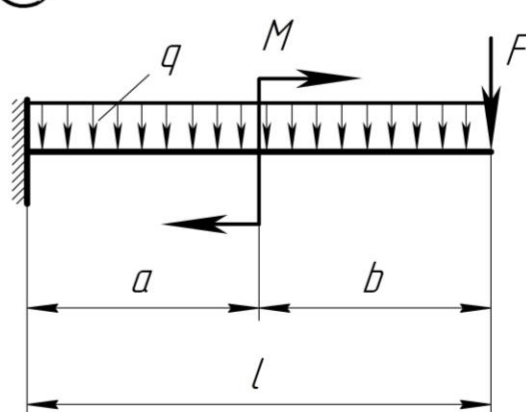
№ з/п	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	$a$ , м	$b$ , м	$l$ , м
1	20	20	30	2	6	8
2	30	30	25	6	6	12
3	10	25	35	4	6	10
4	20	10	40	4	4	8
5	30	30	25	4	8	12
6	10	35	20	2	8	10
7	20	20	30	3	5	8
8	30	25	35	7	5	12
9	10	15	40	2	4	6
0	10	40	20	3	7	10



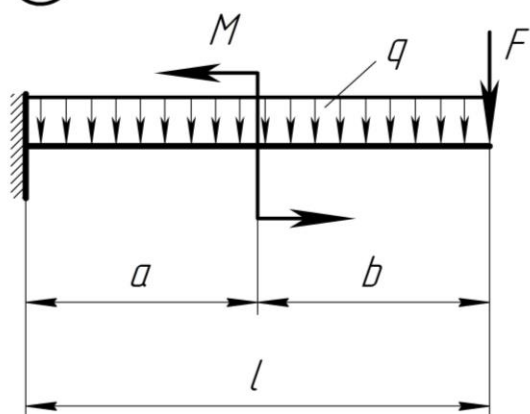
1



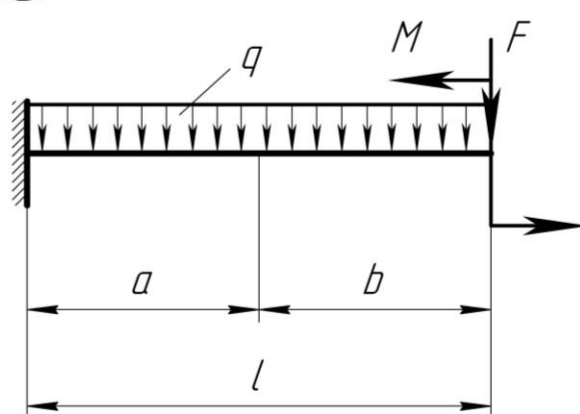
2



3



4



5

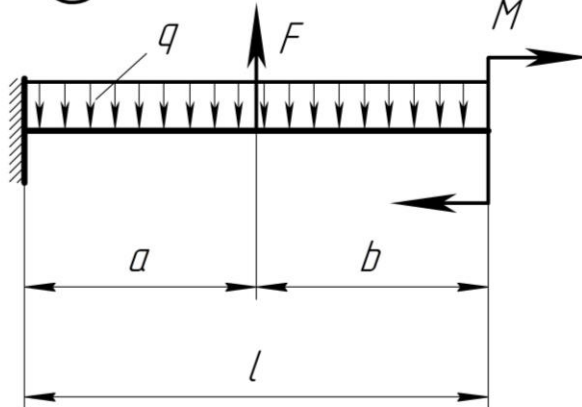


Рисунок до задачі 2

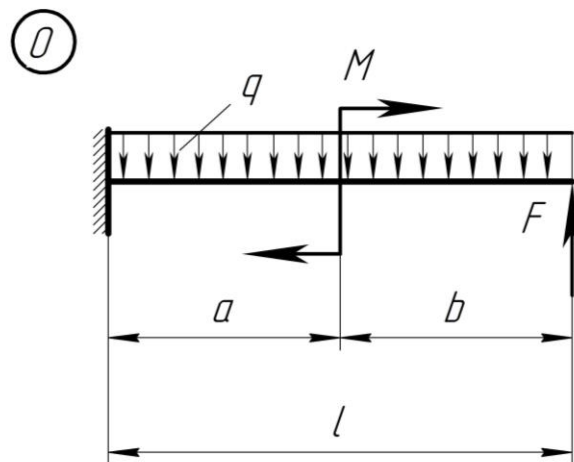
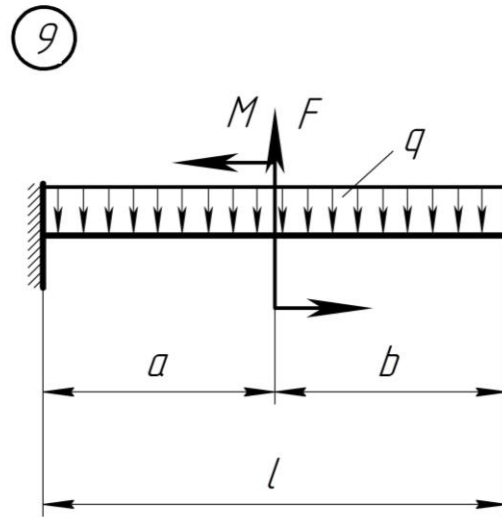
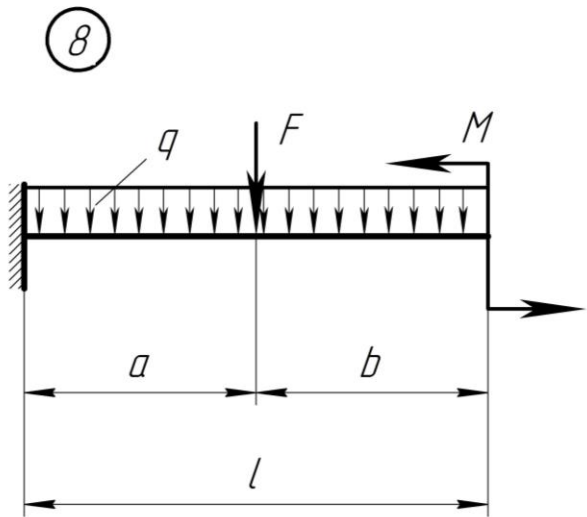
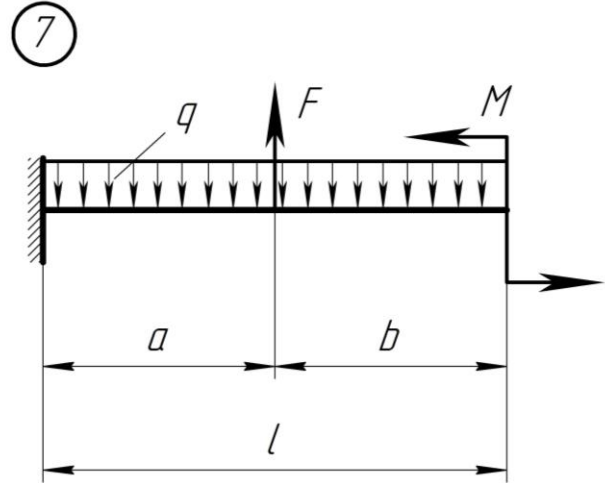
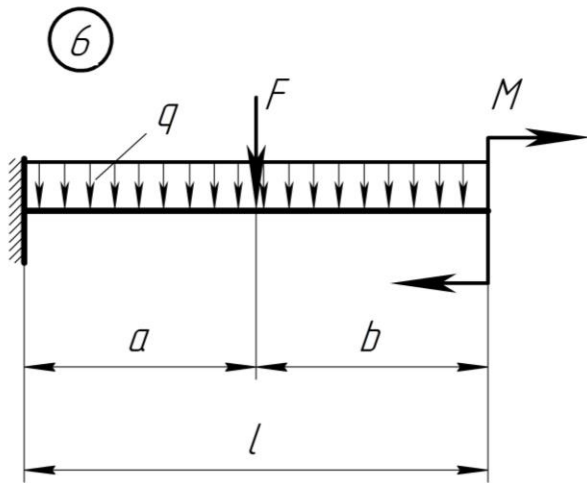


Рисунок до задачі 2 (закінчення)

## Приклад розв'язування задачі 1

### Визначення реакцій опор балки

Горизонтальна балка довжиною  $l = 5$  м встановлена на опорах  $B$  і  $C$  (рис. 1.4а) і навантажена розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q = 20$  кН/м, зосередженою силою  $F = 15$  кН, моментом  $M = 16$  кНм. Не враховуючи силу ваги балки, визначити реакції опор  $B$  і  $C$ .

#### Розв'язування

Відкинувши опори, замінюємо їх реакціями (рис. 1.4б). Реакції опор – це реактивні сили  $B_Y$  і  $C_Y$ . Реактивні сили направимо вертикально, оскільки активні сили, що діють на балку, горизонтальних складових не мають. Розподілене навантаження замінюємо рівнодійною  $Q = q \cdot l = q \cdot 5$ .

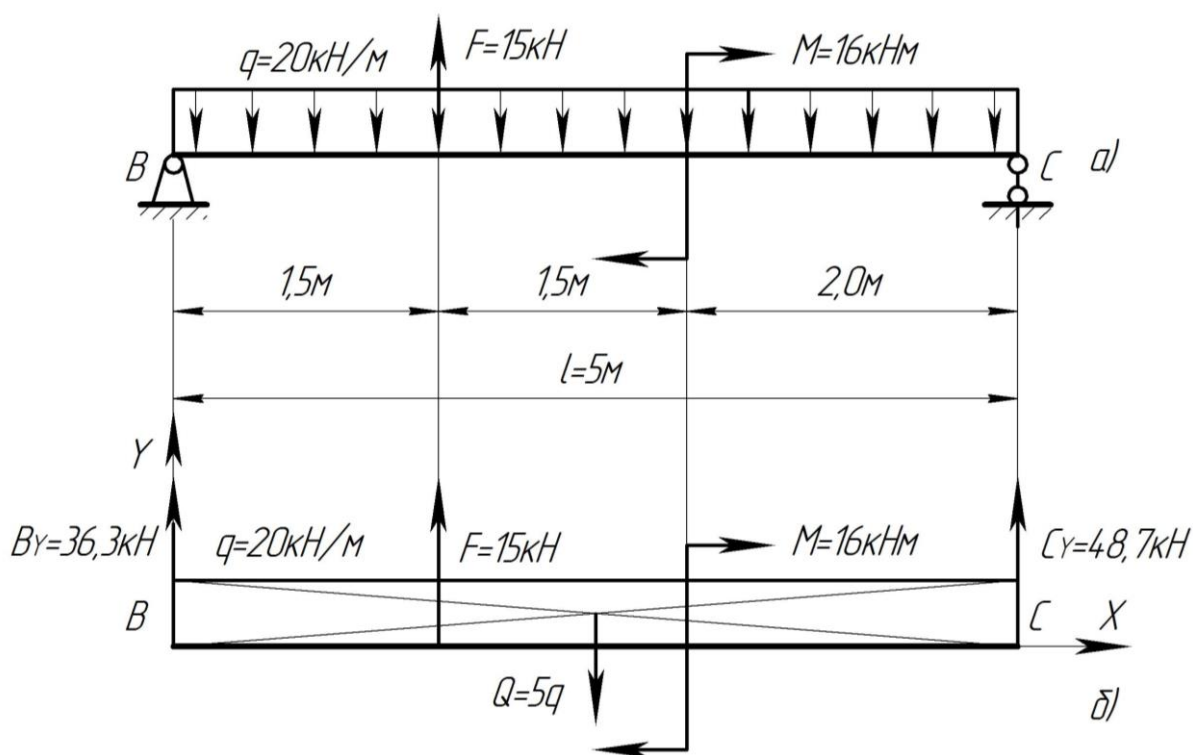


Рисунок 1.4

Використовуючи умову рівноваги плоскої системи паралельних сил, запишемо два рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0; \quad -M - q \cdot 5 \cdot 2.5 + C_Y \cdot 5 + F \cdot 1.5 = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad -M - B_Y \cdot 5 + q \cdot 5 \cdot 2.5 - F \cdot 3.5 = 0,$$

звідки визначимо невідомі реакції

$$B_Y = \frac{-16 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15 \cdot 3,5}{5} = 36,3 \text{ кН};$$

$$C_Y = \frac{16 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15 \cdot 1,5}{5} = 48,7 \text{ кН}.$$

Перевіримо розв'язок, склавши контрольне рівняння – суму проекцій усіх сил на вертикальну вісь.

$$\sum Y = 0; \quad \sum Y = B_Y + C_Y + F - q \cdot 5 = 36,6 + 48,7 + 15 - 20 \cdot 5 = 0.$$

Розв'язок правильний.

Примітка. При розв'язуванні задач механіки необхідно строго дотримуватися **правила**: розмірності й одиниці вимірювання всіх доданків і обох частин рівнянь мають бути однаковими.

## Приклад розв'язування задачі 2 Визначення реакцій защемлення

Консольна балка (рис. 1.5а) довжиною  $l=6$  м навантажена зосередженою силою  $F=35$  кН, розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q=10$  кН/м, парою сил з моментом  $M=15$  кНм. Не враховуючи силу ваги консолі, визначити реакцію защемлення.

### Розв'язування

Відкинувши защемлення, замінюємо його реакціями (рис. 1.5б). Реакція защемлення – це реактивна сила  $R$  і реактивний момент  $M_R$ . Реактивна сила направлена вертикально, оскільки активні сили, що діють на балку, горизонтальних складових не мають. Розподілене навантаження замінюємо рівнодією  $Q = q \cdot l = q \cdot 6$ .

Використовуючи умову рівноваги плоскої системи паралельних сил, запишемо два рівняння рівноваги

$$\sum F_i = 0; \quad R - q \cdot l + F = 0,$$

звідки

$$R = q \cdot l - F = 10 \cdot 6 - 35 = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + F \cdot 4,5 - M + M_R = 0,$$

звідки

$$M_R = 10 \cdot 6 \cdot (6/2) + 15 - 35 \cdot 4,5 = -37,5 \text{ Нм}.$$

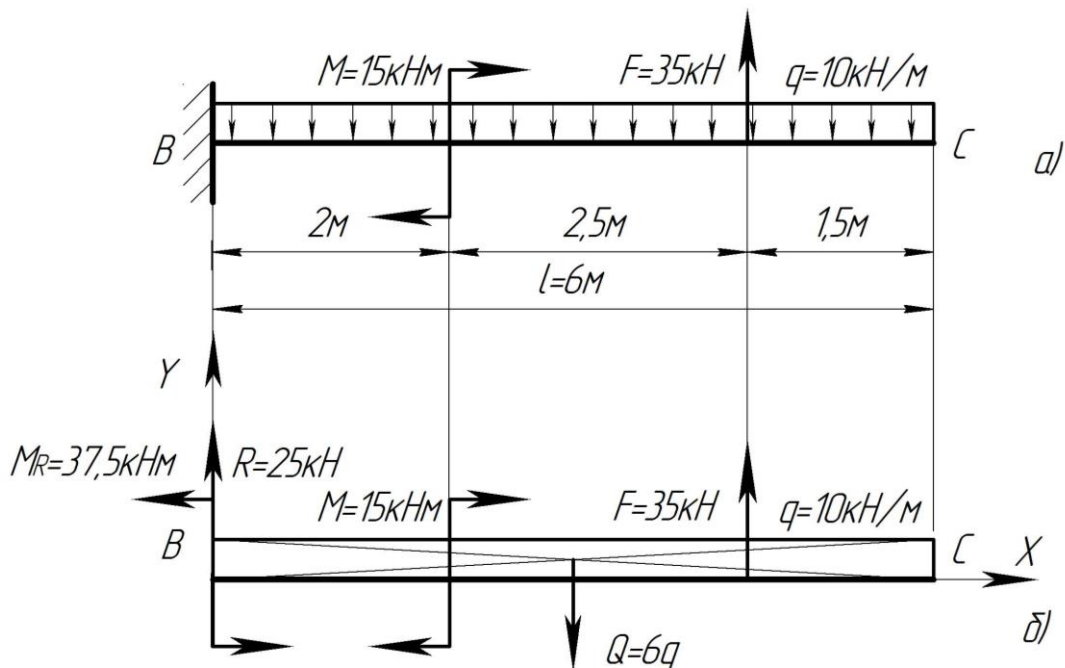


Рисунок 1.5

Перевіримо розв'язок, склавши контрольне рівняння суми моментів відносно точки С.

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; \quad & -R \cdot l + M_R + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M - F \cdot 1,5 = \\ & = -25 \cdot 6 + 37,5 + 10 \cdot 6 \cdot (6/2) - 15 - 35 \cdot 1,5 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок правильний.

### Задача №3

#### Визначення реакцій в опорах рами

Жорстка рама, розташована у вертикальній площині (рисунок до задачі 3), закріплена в точці  $A$  шарнірно, а в точці  $B$  прикріплена або до невагомому стержню з шарнірами на кінцях, або до шарнірної опори на котках.

У точці  $C$  до рами прив'язано трос, перекинутий через блок з прив'язаним на кінці вантажем вагою  $G = 25$  кН. На раму діють пара сил з моментом  $M = 100$  кН·м та дві сили  $F$ . Значення, напрям і точки прикладання сил вказані у таблиці (таблиця до задачі 3).

Визначити реакції в'язей в точках  $A$  і  $B$ , викликані діючими навантаженнями. При розрахунках прийняти  $a = 0,5$  м.

#### ***Вказівки до розв'язування задачі***

Це задача на рівновагу тіла під дією довільної плоскої системи сил. При її розв'язуванні врахувати, що натяги обох віток троса, перекинутого через блок, будуть однаковими, оскільки тертям нехтують.

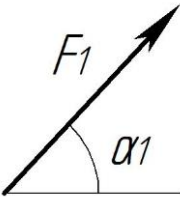
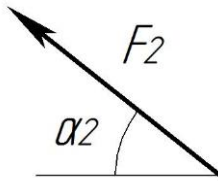
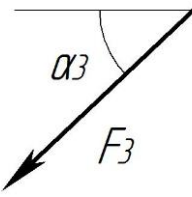
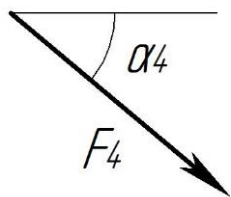
Рівняння моментів буде простішим (буде містити менше невідомих), якщо моменти записувати відносно точки, в якій перетинаються лінії дії двох реакцій в'язей.

При визначенні моменту сили  $F$  зручно розкласти її на складові  $F'$  і  $F''$ , для яких легко визначити плечі, скориставшись теоремою Варіньйона.

#### ***План розв'язування задачі:***

1. Розглянути рівновагу рами.
2. Для отриманої плоскої системи сил скласти три рівняння рівноваги.
3. Визначити числові значення реакцій.

Таблиця до задачі 3

№ з/П	Схеми прикладання сил							
								
	Сили							
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
	Точки прикла- дання	$\alpha_1$ , град	Точки прикла- дання	$\alpha_2$ , град	Точки прикла- дання	$\alpha_3$ , град	Точки прикла- дання	$\alpha_4$ , град
1	$H$	30	—	—	—	—	$K$	60
2	—	—	$D$	15	$E$	60	-	-
3	$K$	75	—	—	—	—	$E$	30
4	—	—	$K$	60	$H$	30	-	-
5	$D$	30	—	—	—	—	$E$	60
6	—	—	$H$	30	—	—	$D$	75
7	$E$	60	—	—	$K$	15	-	-
8	—	—	$D$	60	—	—	$H$	15
9	$H$	60	—	—	$D$	30	—	—
0	—	—	$E$	75	$K$	30	—	—

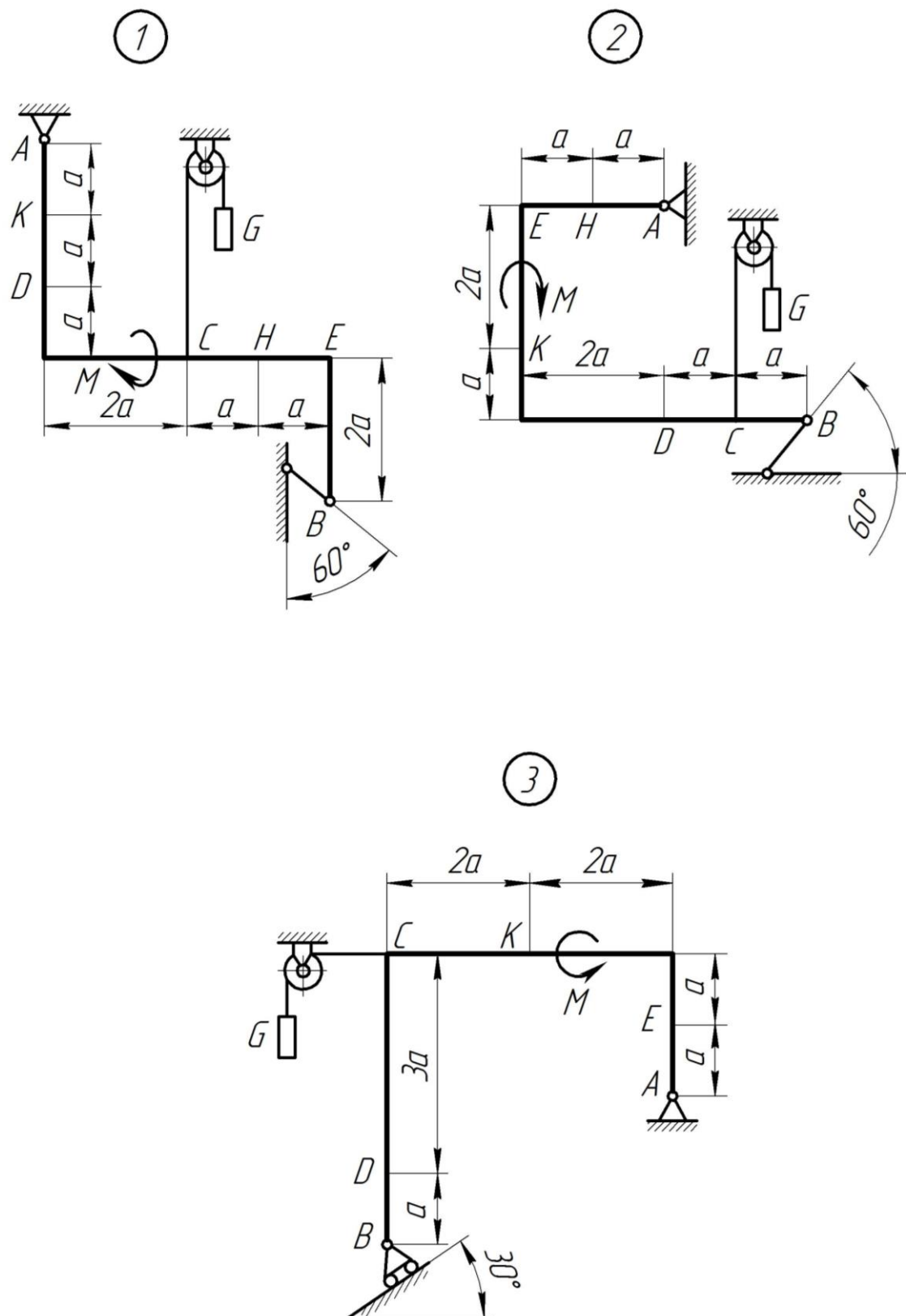


Рисунок до задачі 3



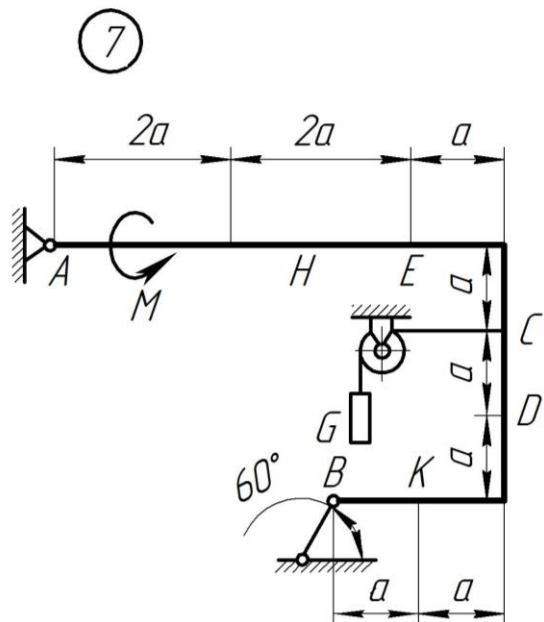
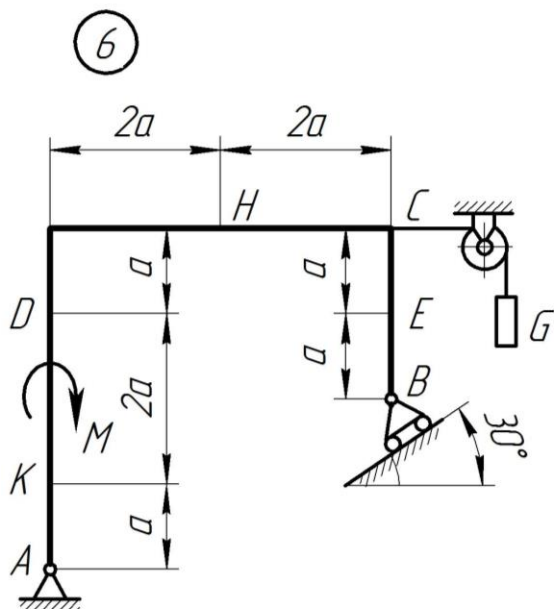
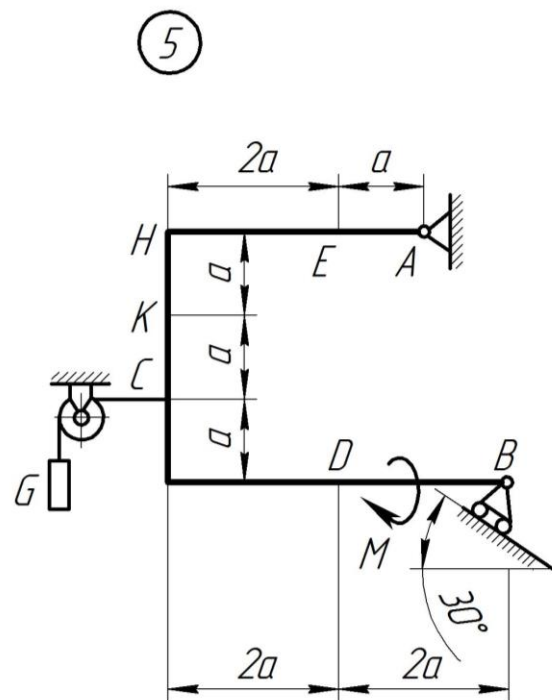
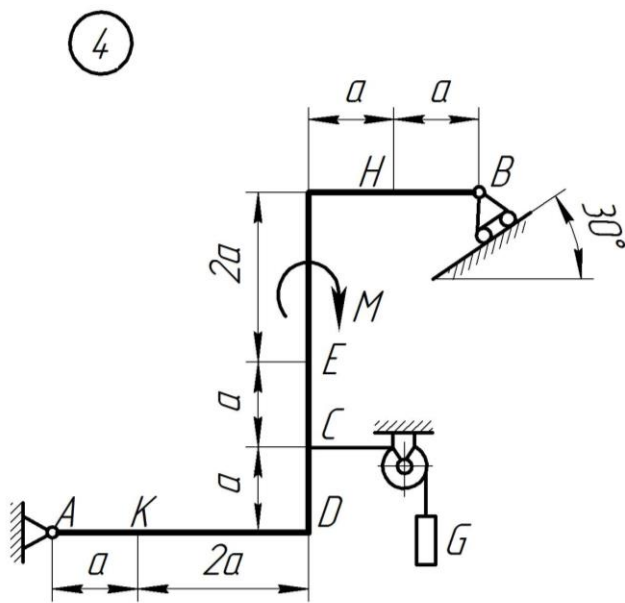


Рисунок до задачі 3 (продовження)

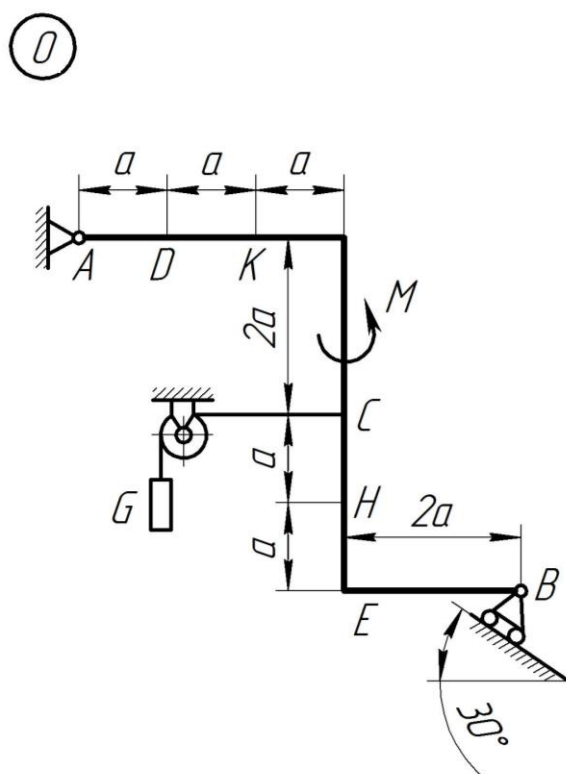
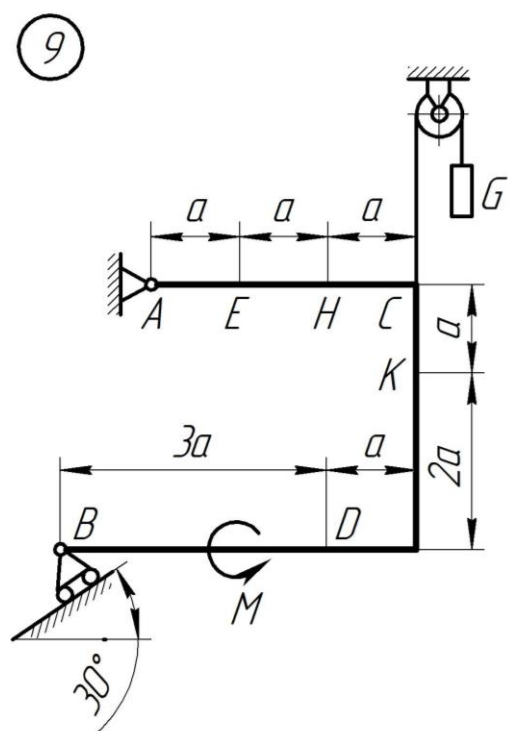
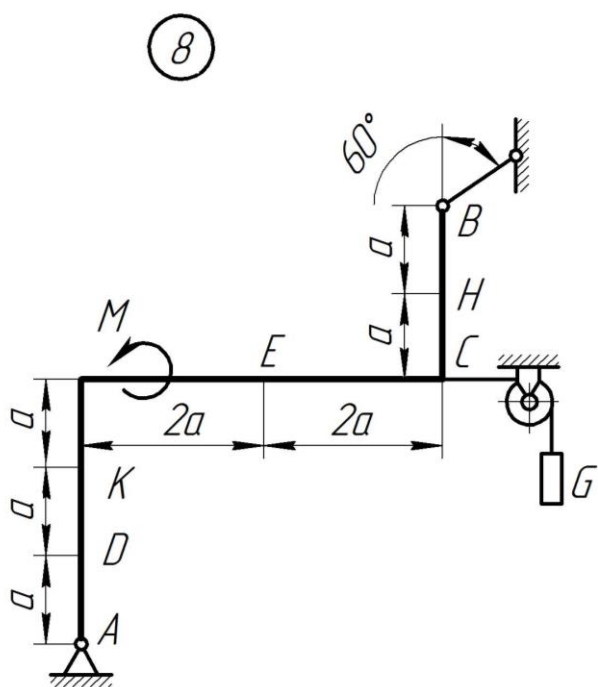


Рисунок до задачі 3 (закінчення)

### Приклад розв'язування задачі 3 Визначення реакцій в опорах рами

Жорстка рама  $ABCD$  (рисунок 1.6) має в точці  $A$  нерухому шарнірну опору, а в точці  $B$  – рухому шарнірну опору на котках. Всі діючі навантаження і розміри вказані на рисунку.

**Дано:**  $F = 25$  кН,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $G = 18$  кН,  $\gamma = 75^\circ$ ,  $M = 50$  кН·м,  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 0,5$  м. Визначити реакції в точках  $A$  і  $B$ , викликані діючими навантаженнями.

#### Розв'язування

1. Розглянемо рівновагу рами. Проведемо координатні осі  $X, Y$  і зобразимо діючі на раму сили (див. рис. 1.6):

- силу  $F$ ;
- пару сил з моментом  $M$ ;
- натяг троса  $T$  (по модулю  $T = G$ );
- реакції в'язей  $X_A, Y_A, R_B$  (реакцію нерухомої шарнірної опори  $A$  зображаємо двома її складовими, реакція шарнірної опори на котках направлена перпендикулярно опорній площині).

2. Для отриманої плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги.

При визначенні моментів сили  $F$  і реакції  $R_B$  відносно точки  $A$  скористаємось теоремою Варіньйона, тобто розкладемо силу  $F$  на складові  $F'$  і  $F''$ ; реакцію  $R_B$  на складові  $R'_B$  і  $R''_B$ .

Складаючи рівняння врахуємо, що

$$M_A(F) = M_A(F') + M_A(F'');$$

$$M_A(R_B) = M_A(R'_B) + M_A(R''_B);$$

$$F' = F \cos \alpha; \quad F'' = F \sin \alpha;$$

$$R'_B = R_B \sin \beta; \quad R''_B = R_B \cos \beta.$$

Тоді отримаємо:

$$\sum F_X = 0, \quad X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0, \quad Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0, \quad M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0. \quad (3)$$

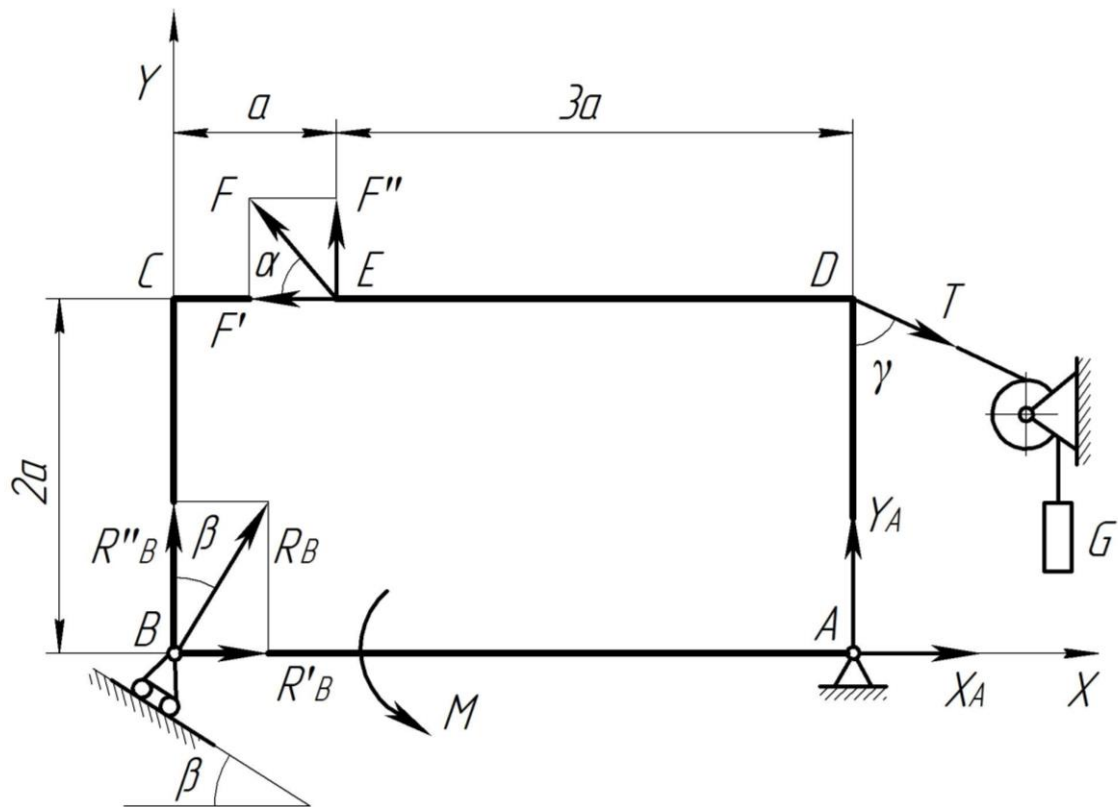


Рисунок 1.6

Підставивши в рівняння (1) – (3) числові значення заданих величин і розв’язавши ці рівняння, визначимо шукані реакції.

**Відповідь:**  $X_A = -8,5$  кН;  $Y_A = -23,3$  кН;  $R_B = 7,3$  кН. Знаки вказують, що сили  $X_A$  і  $Y_A$  направлені протилежно до вказаних на рисунку 1.6.

## 2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

### Задачі опору матеріалів

**Опір матеріалів** – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

**Міцність** – здатність матеріалу чи конструкції витримувати навантаження (механічне або температури) не руйнуючись.

$$p_{\max} \leq [p],$$

де  $p_{\max}$  – максимальне напруження;

$[p]$  – допустиме напруження.

**Жорсткість** – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без зміни геометричних розмірів та форми.

$$f_{\max} \leq [f],$$

де  $f_{\max}$  – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$  – допустима деформація (переміщення).

**Стійкість** – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

### Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою вірно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і провести перевірку міцності.

### Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: бруси, оболонки, пластини, масивні тіла. Відповідно до них виконують розрахунки в опорі матеріалів.

**Стержень (брус)** – тіло призматичної форми, в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

**Пластина** – призматичне (циліндричне) тіло, в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших.

**Оболонка** – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це – пластина з викривленою серединною поверхнею.

**Масив (масивне тіло)** – тіло, розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку.

### Основні види деформацій

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину.

При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки *поздовжня (осьова) сила  $N$* .

Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стержнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють цегляна кладка будинків, фундамент, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила  $Q$* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент  $M_{кр}$* . Кручення зазнають вали (бруси круглого поперечного перетину), які передають потужність під час обертального руху. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає *згинальний момент  $M_{зг}$*  та поперечна сила  $Q$ . Брус, який працює на згин, називають балкою.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: *згин + кручення; стиск + згин* і т.д.

### Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента

конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають **навантаженнями**.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають **нормальним** або **поперечним**; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають **косим** або **похилим**.

**Метод перетинів** полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на 2-і частини (рис. 2.1а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 2.1б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

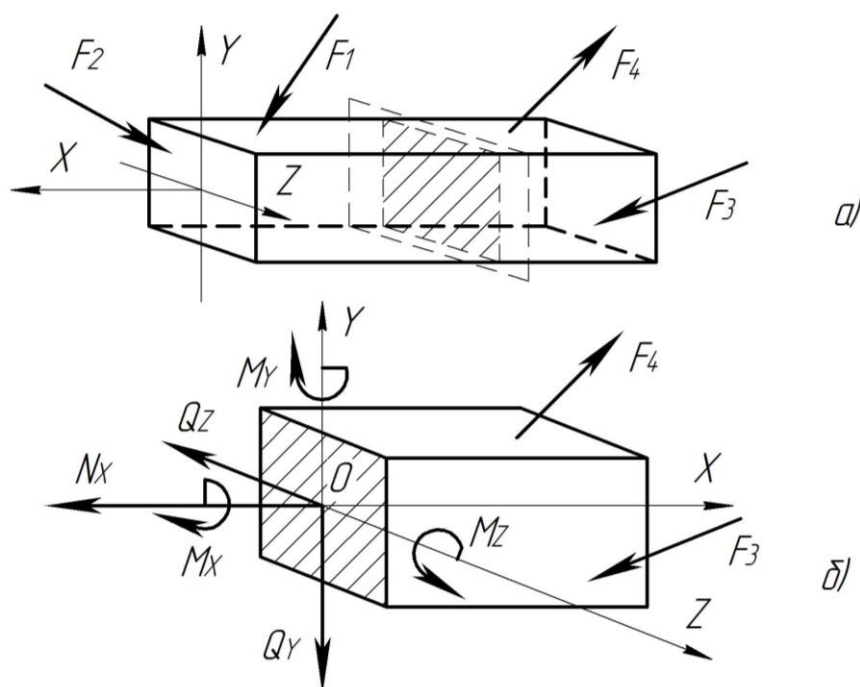


Рисунок 2.1

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

$N_x$  – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

$Q_y$ ,  $Q_z$  – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей  $OY$ ,  $OZ$ ;

$M_Y, M_Z$  – моменти, що повертають перетин навколо осей  $OY, OZ$ ,  
намагаються зігнути стержень у площинах  $XZ$  та  $XY$ , тобто  
згинальні моменти,  $M_Y = M_{3\Gamma.Y}; M_Z = M_{3\Gamma.Z}$ ;

$M_X$  – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот  
перетину відносно поздовжньої осі бруса  $OX$ , тобто скручує  
брус, називають його крутним моментом,  $M_X = M_{KP}$ .

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, незалежно від напружень  $\sigma_X, \tau_{XY}, \tau_{XZ}$ , відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статки). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі  $OX, OY, OZ$ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{array}{ll} \sum X = 0; & N_X + \sum F_{iX} = 0; \\ \sum Y = 0; & Q_Y + \sum F_{iY} = 0; \\ \sum Z = 0; & Q_Z + \sum F_{iZ} = 0; \\ \sum M_X = 0; & M_{KP} + \sum M_X(F_i) = 0; \\ \sum M_Y = 0; & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) = 0; \\ \sum M_Z = 0; & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) = 0. \end{array}$$

**Епюра** – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стержня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

### Напруження

Це – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Повне напруження (рис. 2.2) визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де  $\Delta R$  – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;  
 $\Delta A$  – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля  $\Delta R$ .



Внутрішню силу  $\Delta R$  можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину  $\Delta N$ ; друга лежить у площині перетину  $\Delta Q$ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

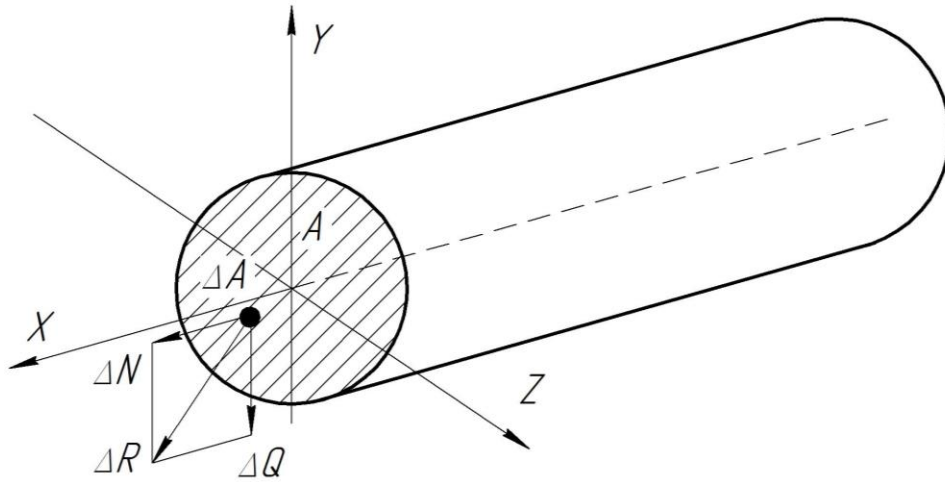


Рисунок 2.2

**Дотичне напруження** – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

**Нормальне напруження** – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень  $1 \text{ Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ ,  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н}/\text{мм}^2$ .

### 3. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

#### Центральний розтяг і стиск. Побудова епюр нормальних сил

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

**Розтяг (стиск)** – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** –  $N$  або  $N_x$ , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи метод перетинів, починаючи з вільного кінця стержня.

**Поздовжня сила** у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на його поздовжню вісь  $Ox$  усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від’ємною**.

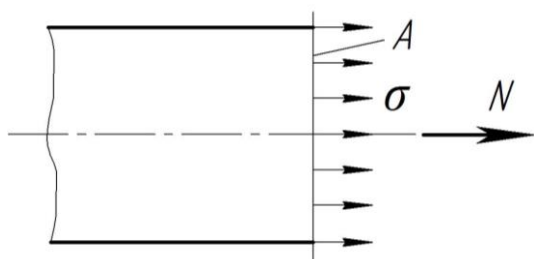
Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

#### Напруження у поперечних перетинах стержня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою  $N$  і нормальним напруженням  $\sigma$  (рис. 3.1) існує залежність



$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Вважаємо, що  $\sigma = const$ , тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Рисунок 3.1

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал деталі, від'ємні, – якщо стискають.

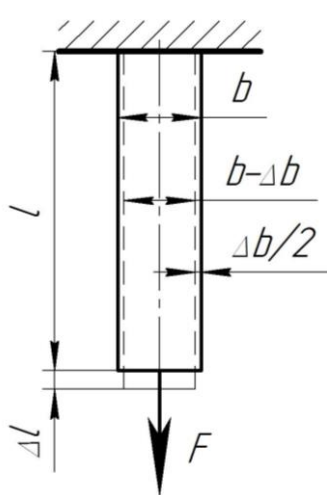
Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – епюри нормальних напружень.

### Поздовжні й поперечні деформації

Розглянемо деформацію стержня, навантаженого осьовою силою  $F$  (рис. 3.2):

$\Delta l$  – повне поздовжнє видовження стержня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

$\Delta b$  – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);



$\varepsilon$  – відносна поздовжня деформація,  $\varepsilon = \Delta l / l$ ;

$\varepsilon'$  – відносна поперечна деформація,  $\varepsilon' = \Delta b / b$ .

До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стержня і поздовжньою силою.

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стержня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

Рисунок 3.2

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де  $E$  – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|.$$

$E$ ,  $\mu$  – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu = 0,3$ .

Закон Гука справедливий лише до певної величини нормального напруження, яке називають границею пропорційності даного матеріалу.

### Діаграма розтягу пластичних матеріалів

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні  $E$  та  $\mu$ , необхідні інженеру-конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рис. 3.3б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і замірюють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують так звану умовну діаграму розтягу в координатах: відносне видовження  $\varepsilon$ , нормальне напруження  $\sigma$ . Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рис. 3.3а. Позначення на діаграмі такі:

$\sigma_{пц}$  – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація

пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука,  $\sigma_{пц} = F_{пц} / A_0$ ;

$\sigma_{пр}$  – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає

пружні властивості (у взірці не виникає залишкових деформацій при знятті навантаження),  $\sigma_{пр} = F_{пр} / A_0$ ;

$\sigma_T$  – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст

пластичних деформацій взірця при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей),  $\sigma_T = F_T / A_0$ ;

$\sigma_M$  – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається

руйнування матеріалу взірця, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує взірець до руйнування,  $\sigma_M = F_{\max} / A_0$ .

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 3.3а) стверджується закон Гука  $E = \sigma / \varepsilon$ .

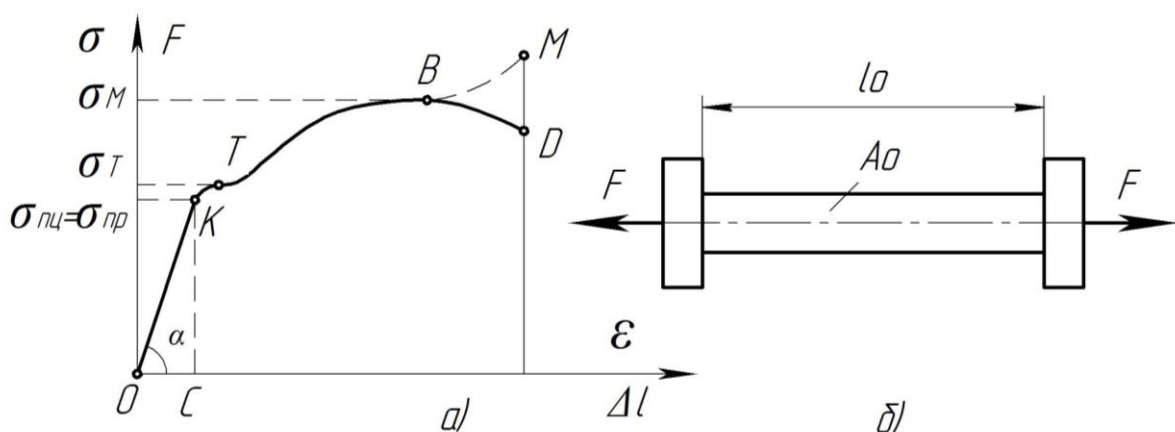


Рисунок 3.3

Тут  $A_0$  – початкова площа поперечного перетину зразка, що піддається розтягу;  $F_{нц}$ ,  $F_{нр}$ ,  $F_T$  – зростання величини сили розтягу,  $F_{\max}$  – максимальна сила навантаження без врахування звуження перетину.

### **Допустимі напруження. Розрахунок на міцність**

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження на розтяг (стиск);

$n$  – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де  $[\sigma]_P$  – допустиме напруження на розтяг;

$[\sigma]_C$  – допустиме напруження на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів  $n = 1,2 \dots 2,5$ ; для крихких матеріалів  $n = 2 \dots 5$ .

### **Умова міцності при розтягу-стиску**

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. **Проектний розрахунок**, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

2. **Перевірний розрахунок**, за яким визначають робочі (дійсні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

3. **Визначення допустимих навантажень**

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

## Задача №4

### Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску

Для заданого прямолінійного сталюого ступінчастого стержня (рисунок до задачі 4, таблиця до задачі 4) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри дійсних нормальних напружень і лінійних поздовжніх переміщень стержня, якщо  $l = 8$  м;  $a = kl$ ;  $b = ml$ ; матеріал стержня – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

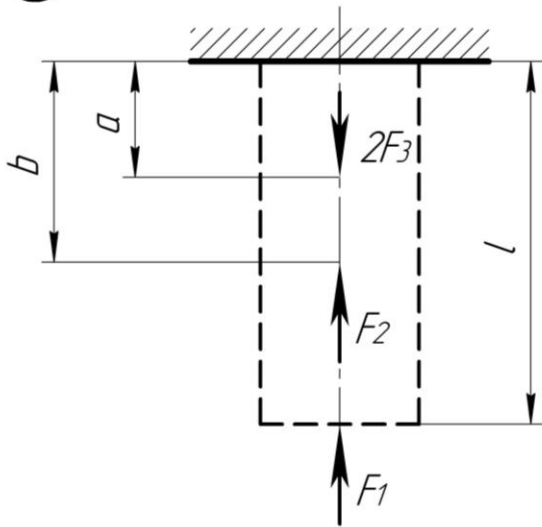
#### *План розв’язування задачі:*

1. Виконати розрахункову схему.
2. Побудувати епюру поздовжніх сил.
3. Визначити, з умови міцності, діаметри стержня на всіх ділянках. Отримані величини заокруглити до розміру, кратного 2 або 5. Виконати ескіз стержня.
4. Обчислити на кожній ділянці дійсне нормальне напруження за модулем  $\sigma_0$  і побудувати епюру дійсних нормальних напружень.
5. Визначити лінійні переміщення окремих ступенів і всього стержня.
6. Побудувати епюру розподілу переміщень на довжині бруса.

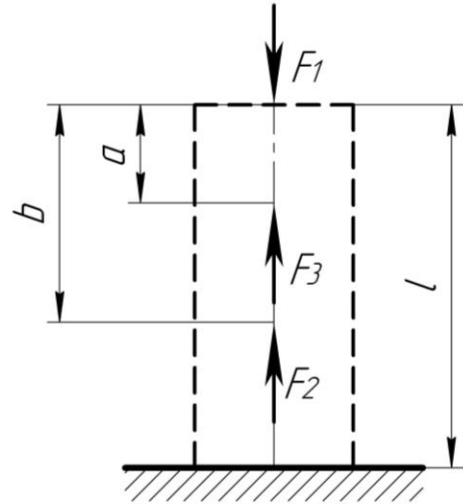
*Таблиця до задачі 4*

№ з/П	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$k$	$m$
1	25	30	50	0,2	0,5
2	10	40	20	0,4	0,7
3	20	10	60	0,1	0,4
4	15	20	40	0,3	0,6
5	30	25	10	0,25	0,65
6	25	50	25	0,35	0,75
7	40	15	30	0,45	0,8
8	20	30	50	0,15	0,45
9	50	20	40	0,2	0,8
0	60	10	20	0,4	0,8

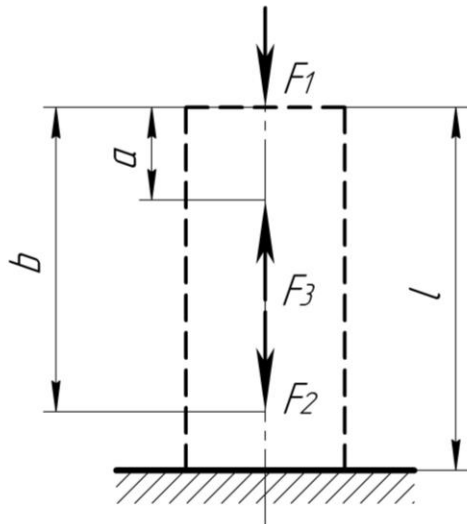
1



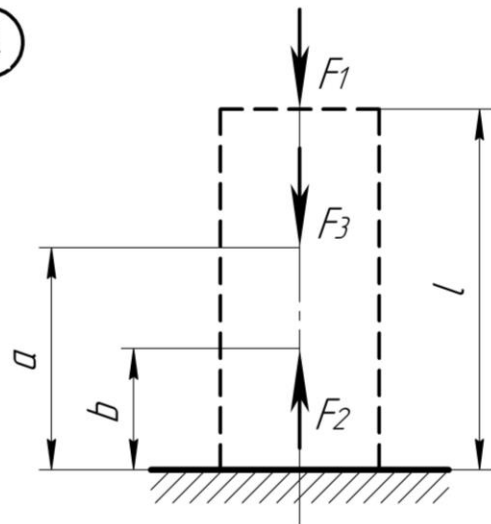
2



3



4



5

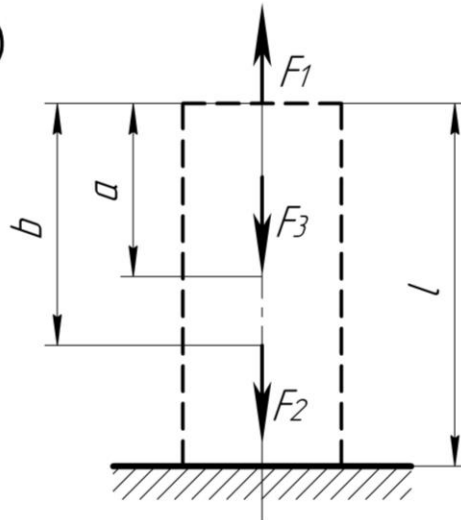


Рисунок до задачі 4

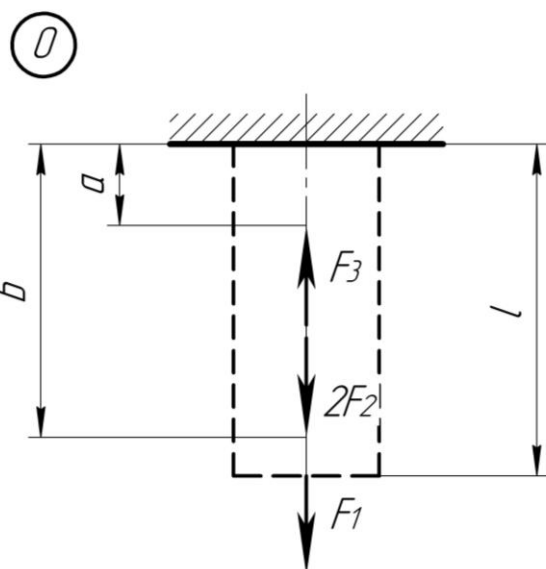
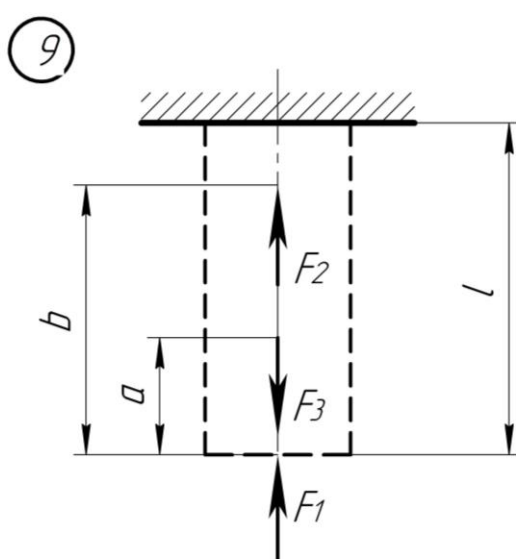
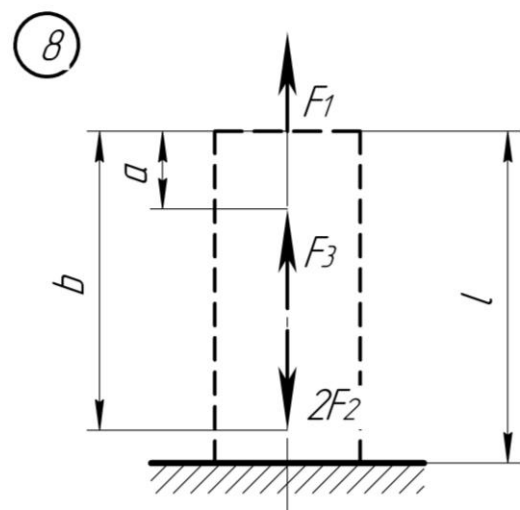
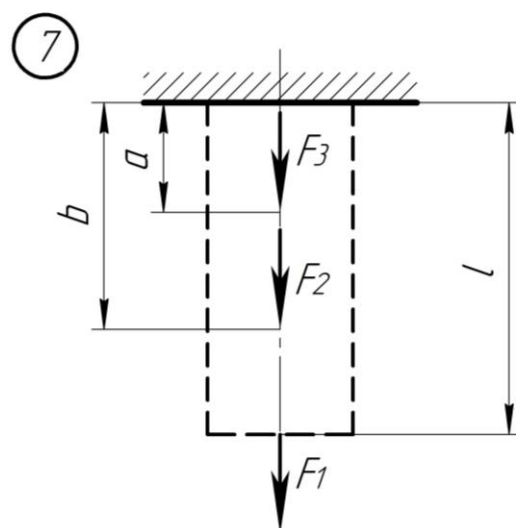
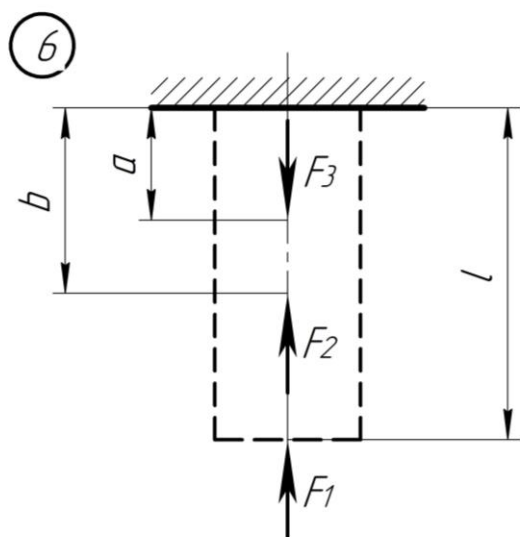


Рисунок до задачі 4 (закінчення)



**Приклад розв'язування задачі №4**  
**Розрахунок на міцність і визначення переміщень**  
**при розтягу й стиску**

Для заданого прямолінійного сталюого ступінчастого стержня (рис. 3.4а) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину – круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри дійсних нормальних напружень і лінійних поздовжніх переміщень стержня, якщо  $l = 8$  м; матеріал стержня – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Розв'язування**

Розбиваємо стержень на три ділянки (рис. 3.4а). Для кожної з ділянок визначаємо значення поздовжніх (нормальних) сил:

$$N_1 = F_1 = 10 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 20 = 30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 + F_2 - 2F_3 = 10 + 20 - 2 \cdot 40 = -50 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру поздовжніх сил,  $N$  (рис. 3.4б).

З умови міцності на розтяг-стиск  $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$  визначаємо необхідні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Діаметри стержня визначаємо за формулою

$$A_i = \pi \cdot d_i^2 / 4, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, 4,$$

звідки

$$d_i \geq \sqrt{4A_i / \pi}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{3,14}} = 8,92 \text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{3,14}} = 15,45 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{3,14}} = 19,95 \text{ мм}.$$

Отримані результати заокруглюємо:  $d_{1\partial} = 10$  мм,  $d_{2\partial} = 16$  мм,  $d_{3\partial} = 20$  мм. Виконуємо ескіз стержня (рис. 3.4в).

Визначаємо дійсні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці з урахуванням заокруглення їх діаметрів за формулою

$$A_{i\partial} = \pi \cdot d_{i\partial}^2 / 4.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$A_{1\partial} = 3,14 \cdot 10^2 / 4 = 78,5 \text{ мм}^2;$$

$$A_{2\partial} = 3,14 \cdot 16^2 / 4 = 201 \text{ мм}^2;$$

$$A_{3\partial} = 3,14 \cdot 20^2 / 4 = 314 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо дійсні нормальні напруження за формулою

$$\sigma_{i\partial} = \frac{|N_i|}{A_{i\partial}}.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$\sigma_{1\partial} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{78,5 \cdot 10^{-6}} = 127 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2\partial} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{201 \cdot 10^{-6}} = 149 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3\partial} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 159 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень  $\sigma_{\partial}$  за модулем (рис. 3.4г).

Поздовжні (лінійні) деформації кожної ділянки стержня визначаємо за формулою

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_{i\partial}},$$

де  $L_i$  – довжина ділянки стержня, на якій діє поздовжня сила  $N_i$ .

У числовому вигляді

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 78,5 \cdot 10^{-6}} = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,53 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{30 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 201 \cdot 10^{-6}} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,79 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 3,2}{2 \cdot 10^8 \cdot 314 \cdot 10^{-6}} = -2,54 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2,54 \text{ мм}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру лінійних переміщень перетинів стержня (рис. 3.4д). За нуль приймаємо закріплення.

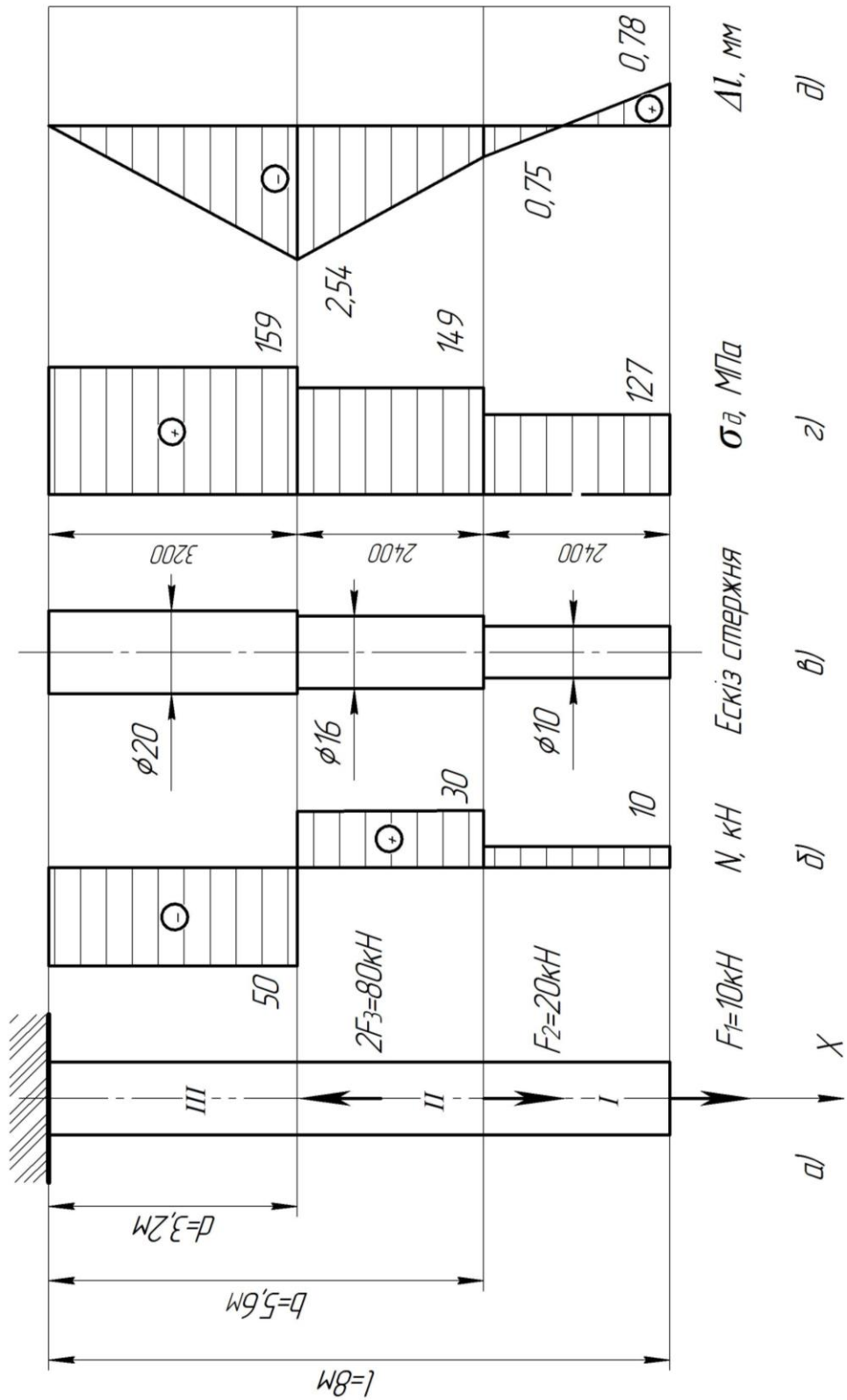


Рисунок 3.4

## 4. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕТИНУ

### Кручення

**Кручення** – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*,  $M_{KP}$ .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил  $M$  (рис 4.1). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх  $T$ , і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх  $M$ .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

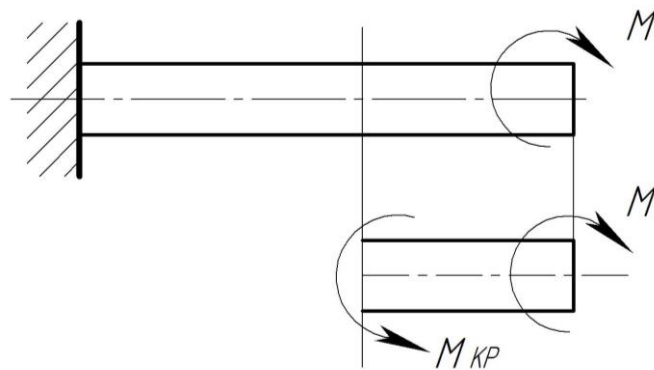


Рисунок 4.1

**Крутний момент**  $M_{KP}$  у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину. Крутний момент вважають **додатним**, якщо при погляді у торець відсіченої частини вала (метод перетинів) він діє проти годинникової стрілки. При визначенні крутного моменту зовнішні скручувальні моменти входять до рівнянь зі знаком «плюс», якщо вони діють за годинниковою стрілкою.

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил, користуючись правилом визначення крутних моментів.

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стержня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_p} \cdot \rho,$$

де  $\rho$  – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рис. 4.2а).

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рис. 4.2б.

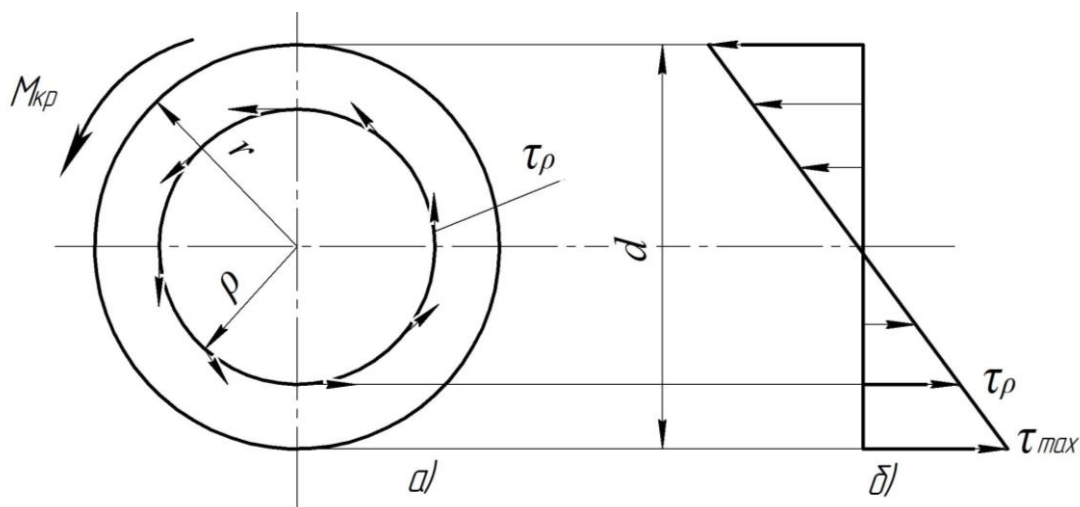


Рисунок 4.2

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину,  $\rho = 0$  і досягають максимального значення у точках контура,  $\rho = d/2$ . У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані  $\rho$  (див. рис. 4.2б). Оскільки  $I_p / (d/2) = W_p$ , то  $\tau_{max} = M_{KP} / W_p$ .

**Умова міцності при крученні.** Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_p} \leq [\tau],$$

де  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу  $[\sigma]_p$ :

для сталей  $[\tau] = (0,55 \dots 0,6) [\sigma]_p$ ;

для чавунів  $[\tau] = (1 \dots 1,2) [\sigma]_p$ .

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. **Добір поперечного перетину** (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_p \geq M_{KP} / [\tau], \text{ для круглого перетину } d = \sqrt[3]{16 W_p / \pi}.$$

2. **Перевірка міцності**, зводиться до порівняння фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_p} \leq [\tau].$$

3. **Визначення найбільшого допустимого крутного моменту**

$$[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_p.$$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут  $\varphi$  – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості  $G \cdot I_p$  довжиною  $l$  при постійному значенні крутного моменту  $M_{KP}$  кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_p} \text{ [рад]}; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \text{ [град]}.$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок  $\varphi = \sum \varphi_i$ .

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами

$$\theta = \varphi / l; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_p} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[ \frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

**Умова жорсткості вала при крученні.** Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де  $[\theta]$  – допустимий кут закручування вала.

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: **проектний, перевірний і визначення допустимого навантаження**.

## Задача №5

### Розрахунок вала на кручення

На вал (риунок. до задачі 5, таблиця до задачі 5) насаджено 5 шківів, які передають потужності  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_0$ . Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування  $[\theta] = 2$  град/м. Частота обертання вала  $\omega$ , відстань  $a = 0,4$  м. Матеріал – сталь 45;  $[\tau] = 60$  МПа;  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

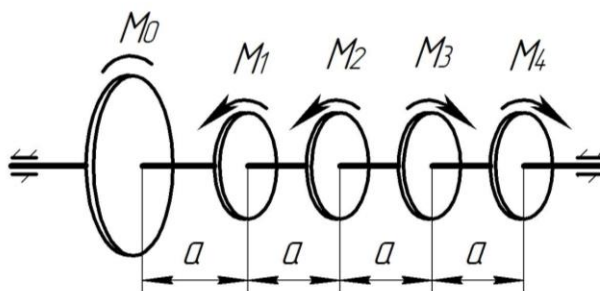
#### План розв'язування задачі:

1. Визначити, нехтуючи тертям у підшипниках, потужність на шківі  $P_0$ .
2. Знайти скручувальні моменти, що передаються кожним шківом.
3. Визначити крутні моменти  $M_{KP}$  на кожній ділянці вала. Побудувати епюру крутних моментів.
4. З умови міцності на кручення визначити діаметри вала на окремих його ділянках. Заокруглити отримані величини до розміру кратного 2 або 5.
5. Виконати ескіз ступінчастого вала (з позначенням діаметрів і довжин окремих ділянок).
6. Визначити величини кутів закручування на окремих ділянках і побудувати епюру кутів закручування для всього вала, приймаючи за нерухомий перетин один з кінців вала або перетин, де діє  $P_0$ .
7. Провести перевірку вала на жорсткість.

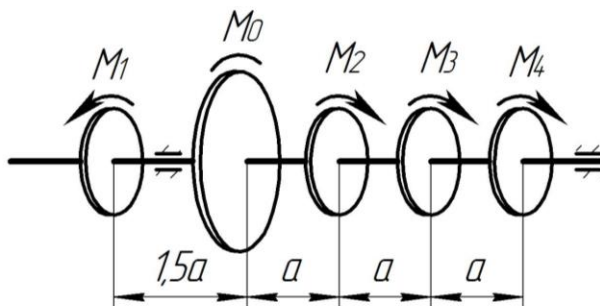
#### Таблиця до задачі 5

№ з/п	$P_1$ , кВт	$P_2$ , кВт	$P_3$ , кВт	$P_4$ , кВт	$\omega$ , рад/сек
1	11	12	13	14	10
2	12	13	14	11	20
3	13	14	11	12	30
4	14	13	12	11	40
5	11	12	13	14	50
6	12	13	14	11	60
7	13	14	11	12	70
8	14	11	12	13	80
9	16	17	13	15	90
0	15	16	14	13	100

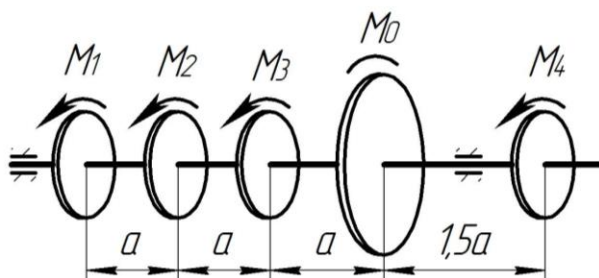
1



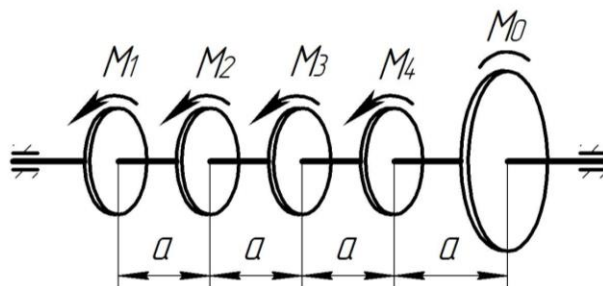
2



3



4



5

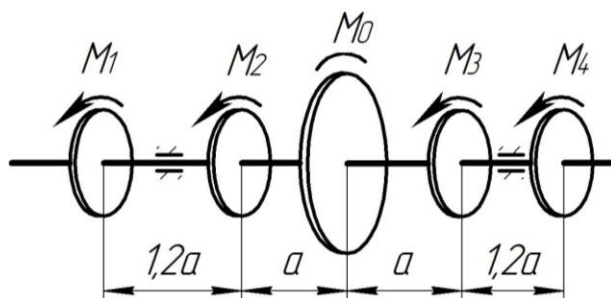
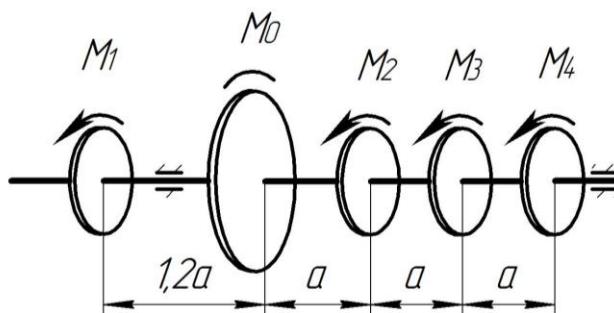


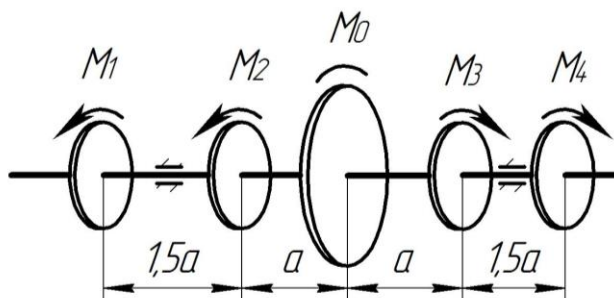
Рисунок до задачі 5



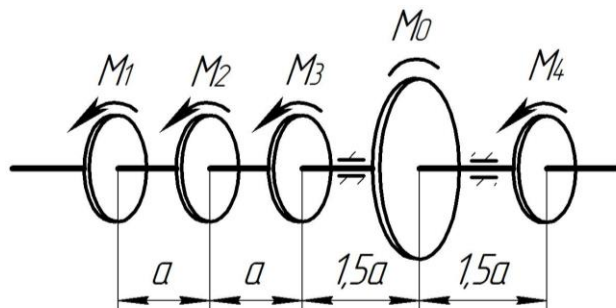
6



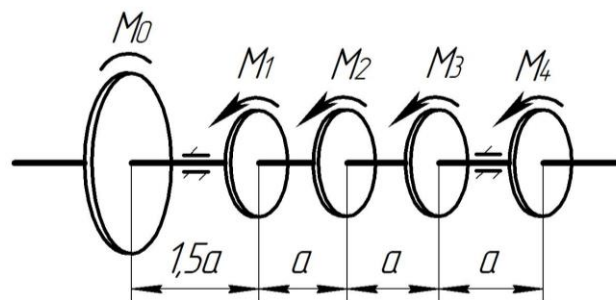
7



8



9



0

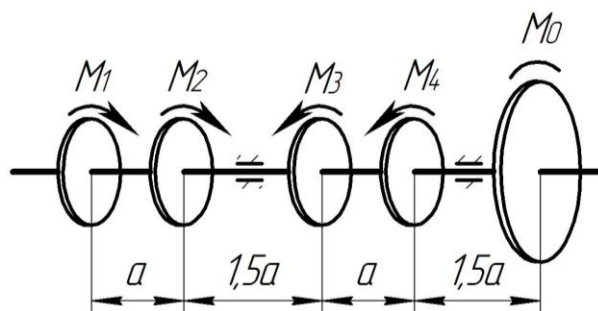


Рисунок до задачі 5 (закінчення)

### Приклад розв'язування задачі №5

#### Розрахунок вала на міцність і жорсткість

На вал (рис. 4.3а) насаджено 5 шківів, які передають потужності  $P_1 = 10$  кВт;  $P_2 = 50$  кВт;  $P_3 = 48$  кВт;  $P_4 = 80$  кВт. Визначити, з умови міцності на кручення, діаметри окремих ділянок вала. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування  $[\theta] = 2$  град/м. Частота обертання вала  $\omega = 40$  с<sup>-1</sup>; відстань  $a = 0,4$  м; матеріал – сталь 45;  $[\tau] = 50$  МПа;  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

#### Розв'язування

Значення потужності  $P_0$  визначаємо на основі рівняння балансу потужностей, записаного з урахуванням напряму дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо),

$$-P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0,$$

звідки

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28 \text{ кВт.}$$

Скручувальні моменти  $M_i$ , які передаються кожним шківом, визначаємо за формулою

$$M_i = \frac{P_i}{\omega}, \quad \text{де } i=0, 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{ кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{ кНм.}$$

Крутні моменти  $M_{KP_i}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) на кожній ділянці вала визначаємо, розглядаючи ділянки зліва і справа, (рис. 4.3б):

$$M_{KP1} = -M_0 = -0,7 \text{ кНм};$$

$$M_{KP2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{ кНм};$$

$$M_{KP3} = M_4 = 2,0 \text{ кНм};$$

$$M_{KP4} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{ кНм.}$$

За отриманими значеннями будуємо епюру крутних моментів (рис. 4.3в).

З умови міцності на кручення  $\tau_{\max} = M_{KP}/W_p \leq [\tau]$ , враховуючи, що момент опору круглого поперечного перетину  $W_p = \pi \cdot d^3/16 \approx 0,2d^3$ , визначаємо діаметр вала на кожній ділянці за формулою

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KPi}}{0,2 [\tau]}}.$$

Підставивши значення крутних моментів, отримаємо

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 50 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала

$$d_{1\partial} = 42 \text{ мм}; d_{2\partial} = 36 \text{ мм}; d_{3\partial} = 44 \text{ мм}; d_{4\partial} = 58 \text{ мм}.$$

За отриманими значення виконуємо ескіз вала (рис. 4.3г).

Кути закручування окремих ділянок вала визначимо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{KPi} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}; \quad i=1, 2, 3, 4,$$

де  $l_i$  – довжина ділянки вала;

$G$  – модуль зсуву,  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа;

$I_{pi}$  – полярний момент інерції поперечного перетину вала

$$I_{pi} = \frac{\pi \cdot d_{i\partial}^4}{32} \cong 0,1 d_{i\partial}^4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

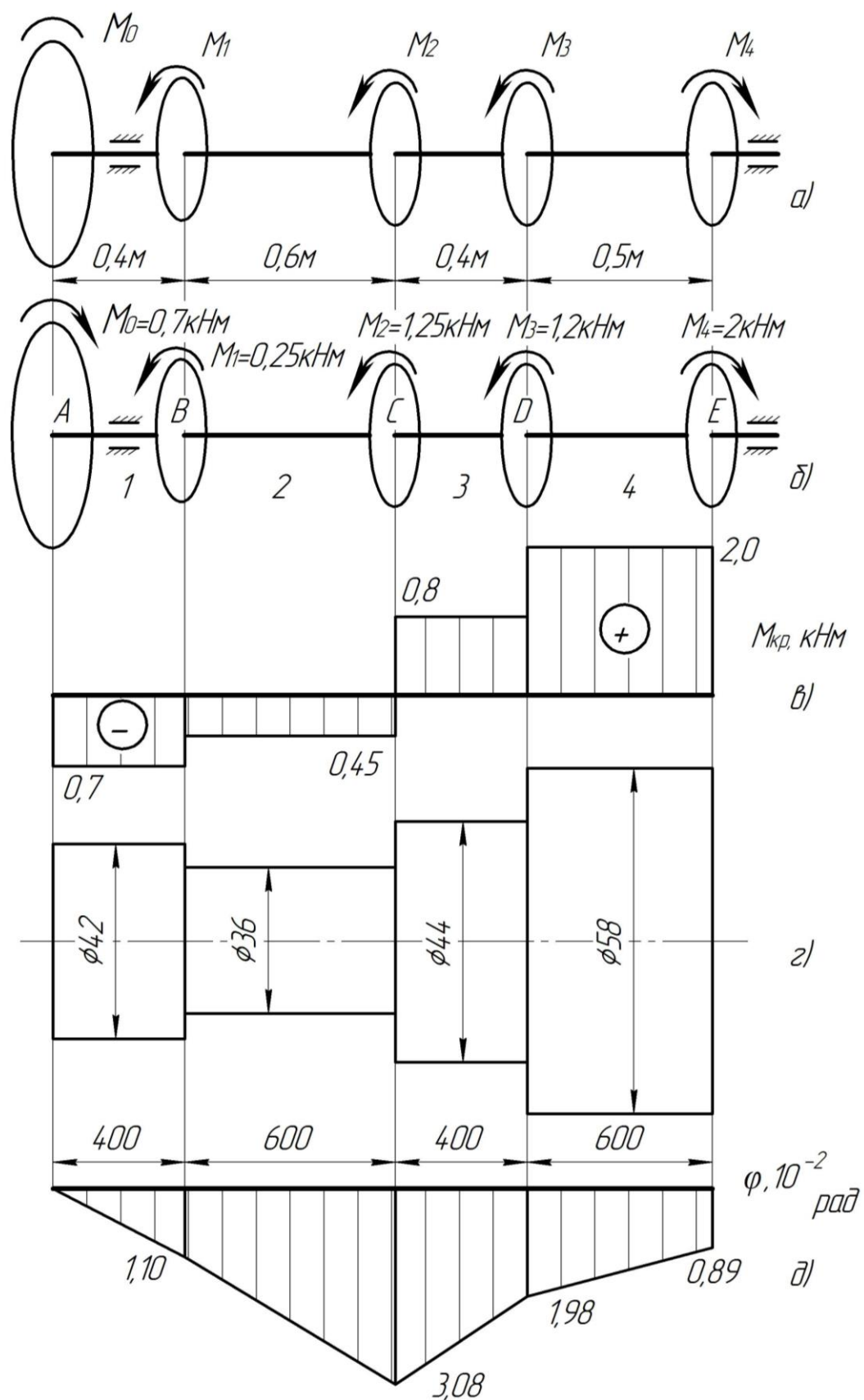


Рисунок 4.3

Визначаємо кути закручування перетинів вала  $B, C, D, E$  відносно перетину  $A$

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,89 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 4.3д), прийнявши за початок відліку перетин  $A$ .

Перевірку на жорсткість вала виконаємо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де  $\theta_{\max}$  – максимальний відносний кут закручування вала.

Визначимо відносні кути закручування на кожній ділянці вала за формулою

$$\theta_i = \frac{\varphi_i}{l_i}, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\theta_1 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо, що

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Отже, умову жорсткості забезпечено.

## 5. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

### Прямий поперечний згин. Внутрішні силові фактори.

#### Правило знаків

**Згин** – це стан опору бруса, в якому відбувається викривлення або зміна кривизни його осі. Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

На згин працюють багато конструктивних елементів: осі залізничних вагонів, вали, панелі перекриттів, прольотні споруди мостів, стріли кранів, плоскі ресори автомобілів і т. д.

**Плоский, або прямий згин** – це такий випадок згину, при якому викривлення осі балки відбувається у напрямі дії зовнішніх сил та навантажень, тобто в одній площині із зовнішніми силами.

**Прямий поперечний згин** – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникають **поперечна сила  $Q$**  та **згинальний момент  $M_{зг}$**  (рис. 5.1). Якщо поперечна сила не виникає, то це – **чистий згин**.

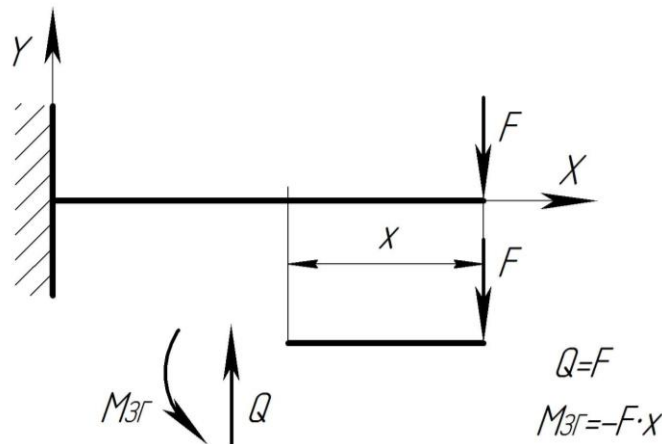


Рисунок 5.1

**Поперечна сила** у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто

$$Q = \sum F_{iY}.$$

**Згинальний момент** у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину відносно центра ваги перетину.

$$M_{зг} = \sum M(F_i).$$

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Отже, **сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перетину, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перетину.**

Правила знаків статичи непридатні для встановлення знаків  $Q$  і  $M_{зг}$ .

**Правило знаків** поперечної сили (рис. 5.2) та згинального моменту (рис. 5.3).

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перетину, дає рівнодійну, направлену вгору, то **поперечну силу** в перетині вважають **додатною**. І навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перетину, знаки поперечної сили будуть протилежними (див. рис. 5.2). Або поперечні сили додатні, якщо вони намагаються повернути елемент балки за годинниковою стрілкою.

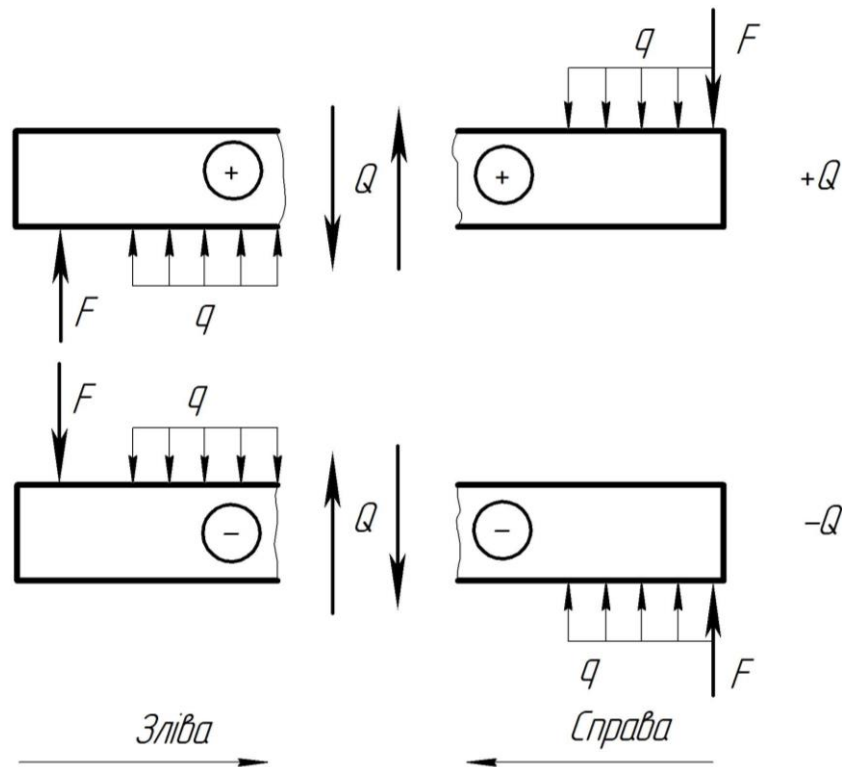


Рисунок 5.2

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз (розтягуються нижні волокна), то **згинальний момент** у перетині вважають **додатним**, і навпаки (див. рис. 5.3).

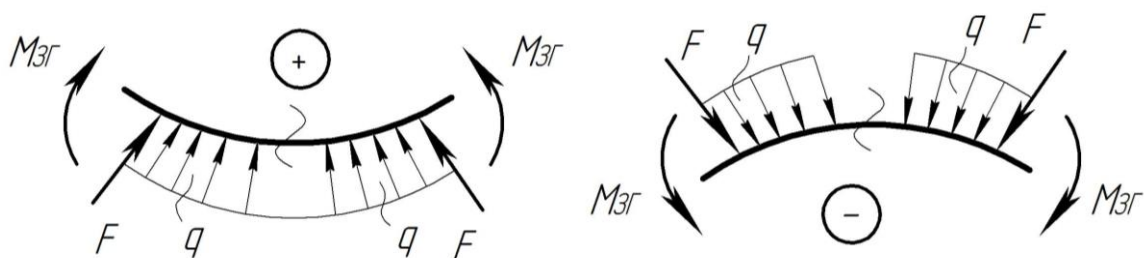


Рисунок 5.3

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено **перетин балки жорстко закріпленим**, а в'язі – відкинутими і заміненими реакціями.

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статички; для визначення знаків згинального моменту і перерізуючої сили – правилами опору матеріалів.

**Усі сили, активні та реактивні, – це навантаження балки.**

Спрощене уявлення реальних опорних елементів, тобто схематизація їх, що використовується для побудови розрахункових схем балок у стані плоского згину, дає змогу виділити три основні типи опор: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома та затиснення (жорстке закріплення). Кожну з них моделюють у вигляді стержнів (рис. 5.4).

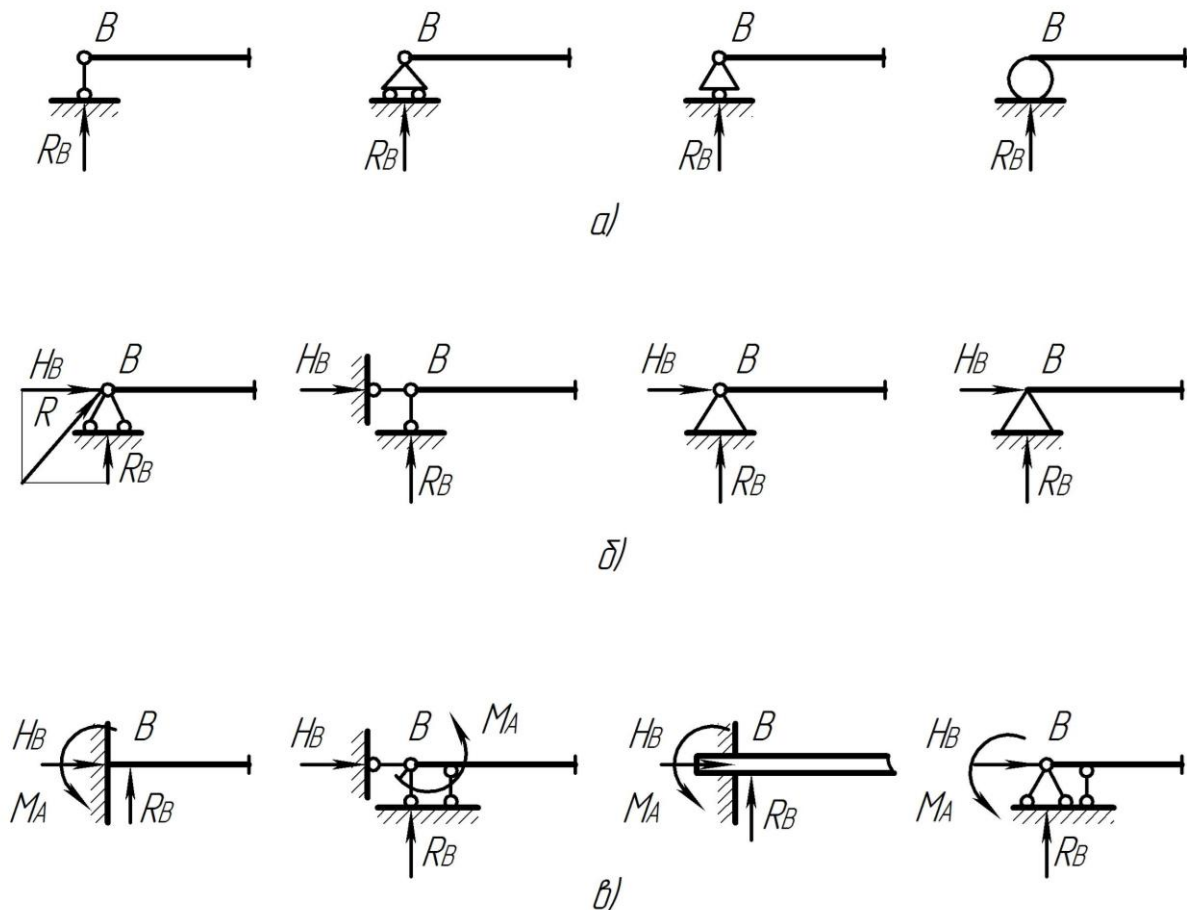


Рисунок 5.4. Схеми опор балок:

а) шарнірно-рухома; б) шарнірно-нерухома; в) жорстке закріплення



### Диференціальні залежності при прямому поперечному згині

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить теорема Журавського: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перетину балки.

Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перетину балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

### Епюри поперечних сил та згинальних моментів

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинальних моментів будують епюри, які дають змогу визначити *можливий небезпечний перетин балки*, встановити значення поперечної сили і згинального моменту в цьому перетині. Епюри поперечних сил та згинальних моментів можна будувати двома способами.

**Перший спосіб.** Записують аналітичні вирази поперечних сил і згинальних моментів для кожної ділянки як функції поточної координати  $x$  поперечного перетину

$$Q = f_1(x), \quad M_{зг} = f_2(x).$$

Потім за добутими рівняннями будують епюри.

**Другий спосіб.** Будують епюри за характерними точками і значеннями поперечних сил і згинальних моментів на межах ділянок. Застосовуючи цей спосіб, у більшості випадків можна обійтися без складання функцій поперечних сил і згинальних моментів.

Побудову епюр внутрішніх силових факторів при згині покажемо на прикладах.

Приклад 1 (рис. 5.5).

Визначаємо опорні реакції балки (рис. 5.5а)

$$\sum M_C = 0; \quad R_B(a+b) - F \cdot b = 0,$$

звідки  $R_B = \frac{F \cdot b}{a+b};$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = R_C(a+b) - F \cdot a = 0,$$

звідки  $R_C = \frac{F \cdot a}{a + b}$ .

Проводимо перевірку правильності визначення опорних реакцій балки

$$\sum Y = R_B - F + R_C = \frac{F \cdot b}{a + b} - F + \frac{F \cdot a}{a + b} = 0.$$

Опорні реакції балки визначено вірно.

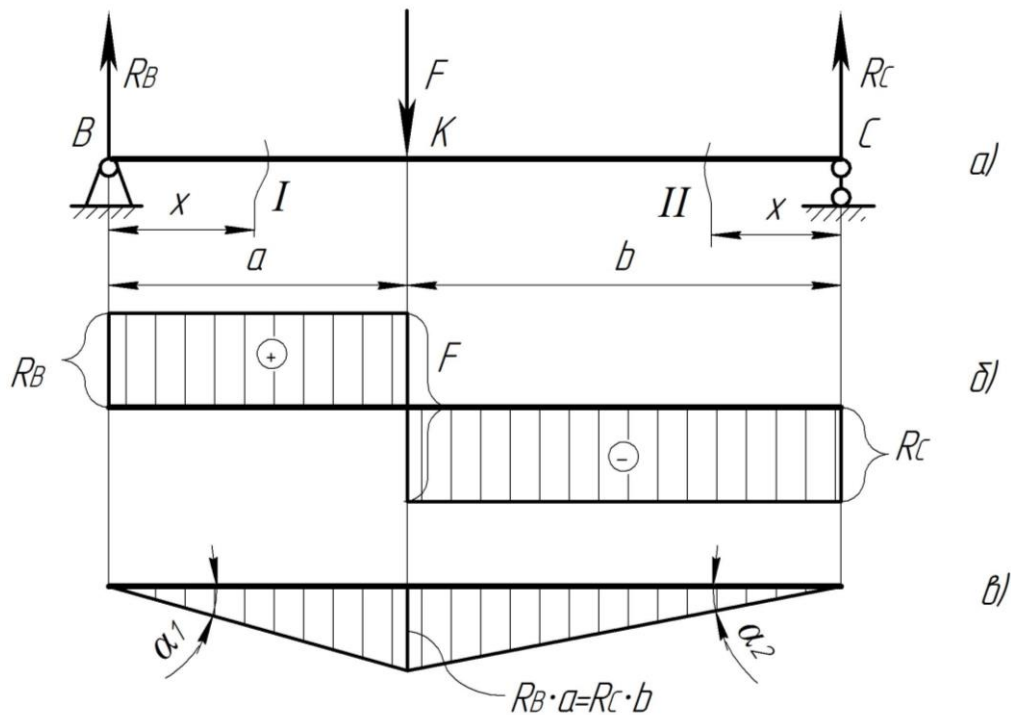


Рисунок 5.5

Використаємо перший спосіб побудови епюр. Розбиваємо балку на ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції  $Q(x)$ ,  $M_{3\Gamma}(x)$ , а також границі, в яких ці функції справедливі (рис. 5.5a):

ділянка I,  $0 \leq x \leq a$  (зліва)

$$Q(x) = R_B = \frac{F \cdot b}{a + b};$$

$$Q(0) = Q(a) = \frac{F \cdot b}{a + b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_B \cdot x = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot x;$$

$$M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(a) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b};$$

ділянка II,  $0 \leq x \leq b$  (справа)

$$Q(x) = -R_C = -\frac{F \cdot a}{a + b};$$

$$Q(0) = Q(b) = -\frac{F \cdot a}{a + b};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_C \cdot x = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x; \quad M_{3\Gamma}(0) = 0; \quad M_{3\Gamma}(b) = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюри  $Q$  і  $M_{3\Gamma}$  (рис. 5.5б,в).

З епюри  $M_{3\Gamma}$  (див. рис. 5.5в) визначаємо небезпечний перетин, тобто перетин, в якому діє максимальний згинальний момент, перетин  $K$

$$M_{3\Gamma \max} = \frac{F \cdot b \cdot a}{a+b}.$$

Визначаємо значення поперечних сил, використовуючи диференціальні залежності (для перевірки):

- на першій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_1 = \frac{M_{3\Gamma \max}}{a} = R_B;$$

- на другій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha_2 = Q_2 = -\frac{M_{3\Gamma \max}}{b} = -R_C.$$

Приклад 2 (рис. 5.6). Використаємо другий спосіб побудови епюр  $Q$ ,  $M_{3\Gamma}$ .

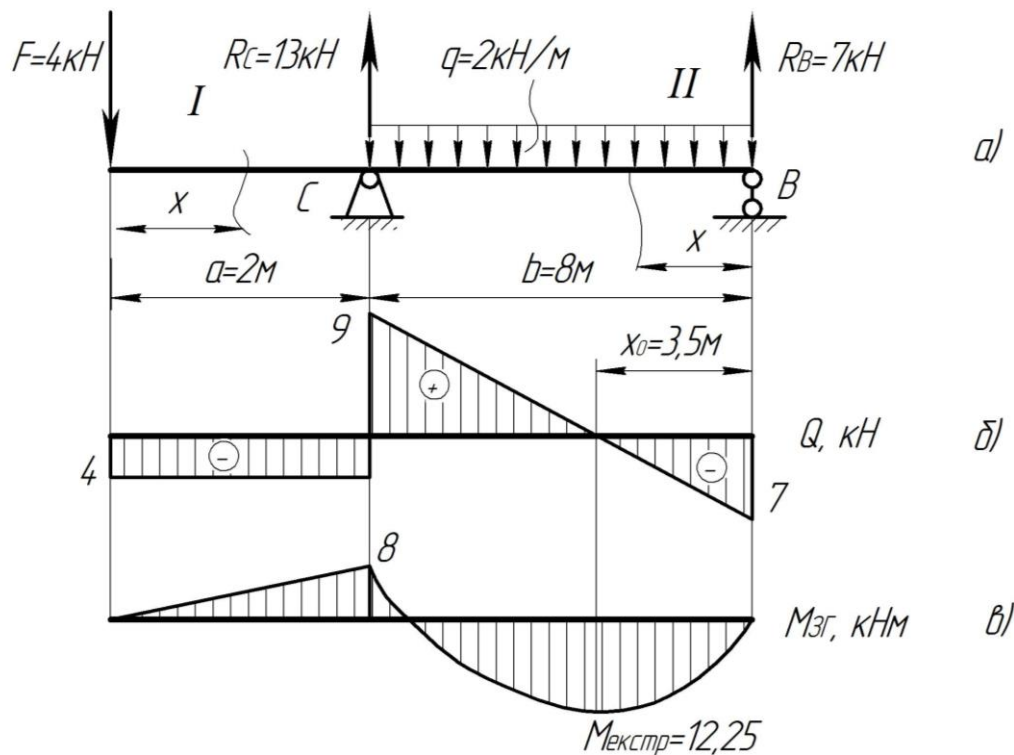


Рисунок 5.6

## **I. Контроль правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів за розрахунковою схемою балки**

### Для епюри поперечних сил:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням  $q$ , епюра поперечних сил зображується прямою, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці балки, вільній від  $q$ , епюра поперечних сил зображується прямою, паралельною осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил є «стрибок», що дорівнює величині прикладеної сили.

4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), епюра поперечних сил не змінює свого значення.

### Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням  $q$ , епюра згинальних моментів зображується квадратичною параболою.

2. На ділянках балки, вільних від  $q$ , епюра згинальних моментів зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

4. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), на епюрі згинальних моментів є «стрибок», що дорівнює величині зосередженого моменту.

5. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка працює на чистий згин, епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

## **II. Перевірка епюри згинальних моментів із використанням диференціальної залежності при згині (за епюрою $Q$ ).**

Виконують перевірку за епюрою поперечних сил, використовуючи залежність

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x),$$

враховуючи, що епюра  $Q$  – це графічне зображення похідної від згинального моменту  $M_{зГ}$ :

1. Функція згинального моменту  $M_{зГ}(x)$  зростає, якщо похідна функції, тобто  $Q(x)$  – додатна.

2. Функція згинального моменту  $M_{зГ}(x)$  спадає, якщо похідна функції, тобто  $Q(x)$  – від'ємна.

3. Функція згинального моменту  $M_{зГ}(x)$  досягає екстремального значення у точці, де її похідна  $Q(x)$  дорівнює нулю. Функцію згинального моменту у цьому перетині обов'язково необхідно досліджувати на екстремум.

### Напруження при згині. Розрахунок на міцність

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при прямому поперечному згині є згинальний момент. Від дії згинального моменту у поперечному перетині балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma(y) = \frac{M_{зГ}}{I_X} \cdot y,$$

де  $y$  – відстань від осі  $X$  (нейтральної осі) до точок поперечного перетину, в яких визначають нормальне напруження (рис. 5.7а).

Аналізуючи цю формулу, отримують епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рис. 5.7б).

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де  $W_X$  – осьовий момент опору поперечного перетину, визначають за формулою

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}}.$$

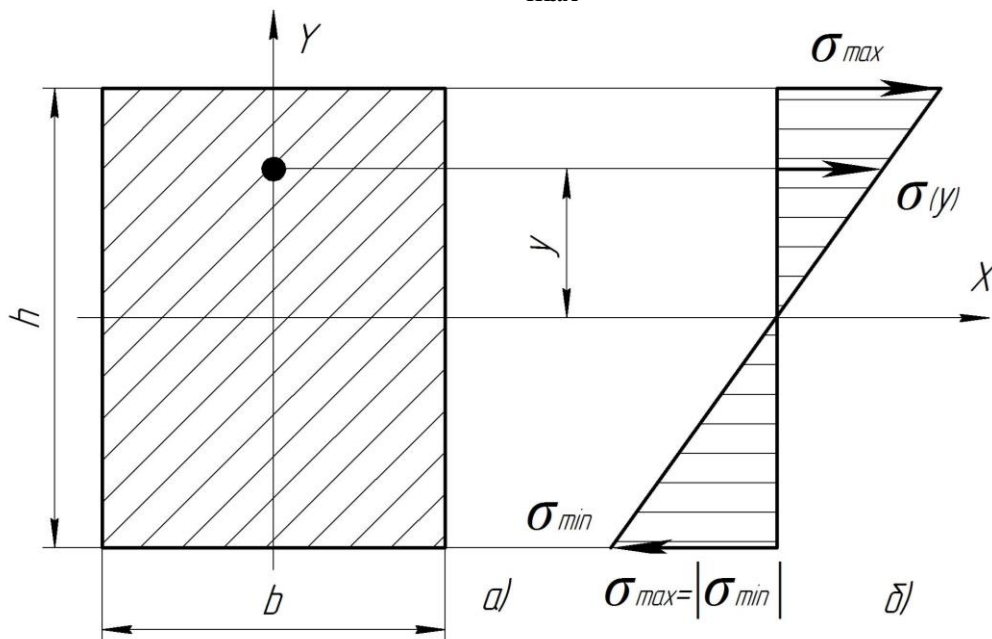


Рисунок 5.7

**Задача №6**  
**Побудова епюр поперечних сил і**  
**згинальних моментів для консолі**

Для заданої консольної балки (див. рис. до задачі 2, табл. до задачі 2) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

***План розв'язування задачі:***

1. Записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках консолі.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

**Задача №7**  
**Побудова епюр поперечних сил і**  
**згинальних моментів для балки на двох опорах,**  
**розрахунок на міцність**

Для заданої балки (див. рис. до задачі 1, табл. до задачі 1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, підібрати двотавровий перетин балки. Матеріал балки – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа.

***План розв'язування задачі:***

1. Визначити реакції опор.
2. Записати функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
3. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.
4. З умови міцності за нормальними напруженнями підібрати двотавровий перетин балки.

**Приклад розв'язування задачі №6**  
**Побудова епюр поперечних сил і**  
**згинальних моментів для консолі**

Для заданої консольної балки (рис. 5.8а) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

**Розв'язування**

Розбиваємо балку на три ділянки. Границями ділянок є перетини, де прикладені зосереджена сила  $F$ , зосереджений момент  $M$ , та перетини, де починається і закінчується розподілене навантаження  $q$ .

При прямому поперечному згині в перетинах виникають такі внутрішні силові фактори – згинальний момент  $M_{зГ}(x)$  і поперечна сила  $Q(x)$ . Для їх визначення використовуємо метод перетинів.

На кожній ділянці балки (для консольної балки розглядаємо ділянки з вільного кінця) робимо умовні перетини, відкидаємо ліву частину балки і розглядаємо рівновагу правої. Сили взаємодії частин балки замінюємо внутрішніми зусиллями  $Q(x)$  і  $M_{зГ}(x)$  (рис. 5.8б). Визначаємо їх як функції поточної координати  $x$  на основі рівнянь рівноваги  $\sum Y = 0$ ;  $\sum M_0 = 0$ , використовуючи правило знаків.

Визначаємо поперечні сили і згинальні моменти на кожній ділянці консолі:

ділянка I,  $0 \leq x \leq 1,5\text{м}$  (справа),

$$Q(x) = q \cdot x = 10 \cdot x;$$

$$Q(0) = 0; \quad Q(1,5) = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ кНм};$$

$$M_{зГ}(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} = -10 \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$M_{зГ}(0) = 0; \quad M_{зГ}(1,5) = -10 \cdot \frac{1,5^2}{2} = -11,25 \text{ кНм};$$

ділянка II,  $1,5\text{м} \leq x \leq 4\text{м}$  (справа),

$$Q(x) = q \cdot x - F = 10 \cdot x - 35;$$

$$Q(1,5) = 10 \cdot 1,5 - 35 = -20 \text{ кНм};$$

$$Q(4) = 10 \cdot 4 - 35 = 5 \text{ кН};$$

$$M_{зГ}(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + F \cdot (x - 1,5) = -10 \cdot \frac{x^2}{2} + 35 \cdot (x - 1,5);$$

$$M_{3\Gamma}(1,5) = -11,25 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(4) = -10 \cdot \frac{4^2}{2} + 35 \cdot (4 - 1,5) = 7,5 \text{ кНм}.$$

Досліджуємо функцію  $M_{3\Gamma}(x)$  на екстремум

$$\frac{M_{3\Gamma}(x)}{dx} = Q(x) = q \cdot x_0 - F = 0;$$

$$x_0 = \frac{F}{q} = \frac{35}{10} = 3,5 \text{ м}.$$

Тоді

$$M_{3\Gamma}(3,5) = M_{3\Gamma \text{ екстр}} = -10 \cdot \frac{3,5^2}{2} + 35 \cdot (3,5 - 1,5) = 8,75 \text{ кНм}.$$

Зазначимо, що необхідною умовою екстремуму функції  $M_{3\Gamma}(x)$  на ділянці є нульове значення на цій ділянці  $Q(x)$ .

*Ділянка III,  $4\text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м}$  (справа),*

$$Q(x) = q \cdot x - F = 10 \cdot x - 35;$$

$$Q(4) = 10 \cdot 4 - 35 = 5 \text{ кН};$$

$$Q(6) = 10 \cdot 6 - 35 = 25 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + F \cdot (x - 1,5) - M = -10 \cdot \frac{x^2}{2} + 35 \cdot (x - 3,5) - 15;$$

$$M_{3\Gamma}(4) = -10 \cdot \frac{4^2}{2} + 35 \cdot (4 - 1,5) - 15 = -7,5 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(6) = -10 \cdot \frac{6^2}{2} + 35 \cdot (6 - 1,5) - 15 = -37,5 \text{ кНм}.$$

За отриманими результатами будуємо епюри  $Q$  і  $M_{3\Gamma}$  (рис. 5.86, з). Епюру згинальних моментів будуємо з боку розтягнутих волокон, тобто додатні значення згинальних моментів відкладаємо вниз від осі, а від'ємні – вгору.



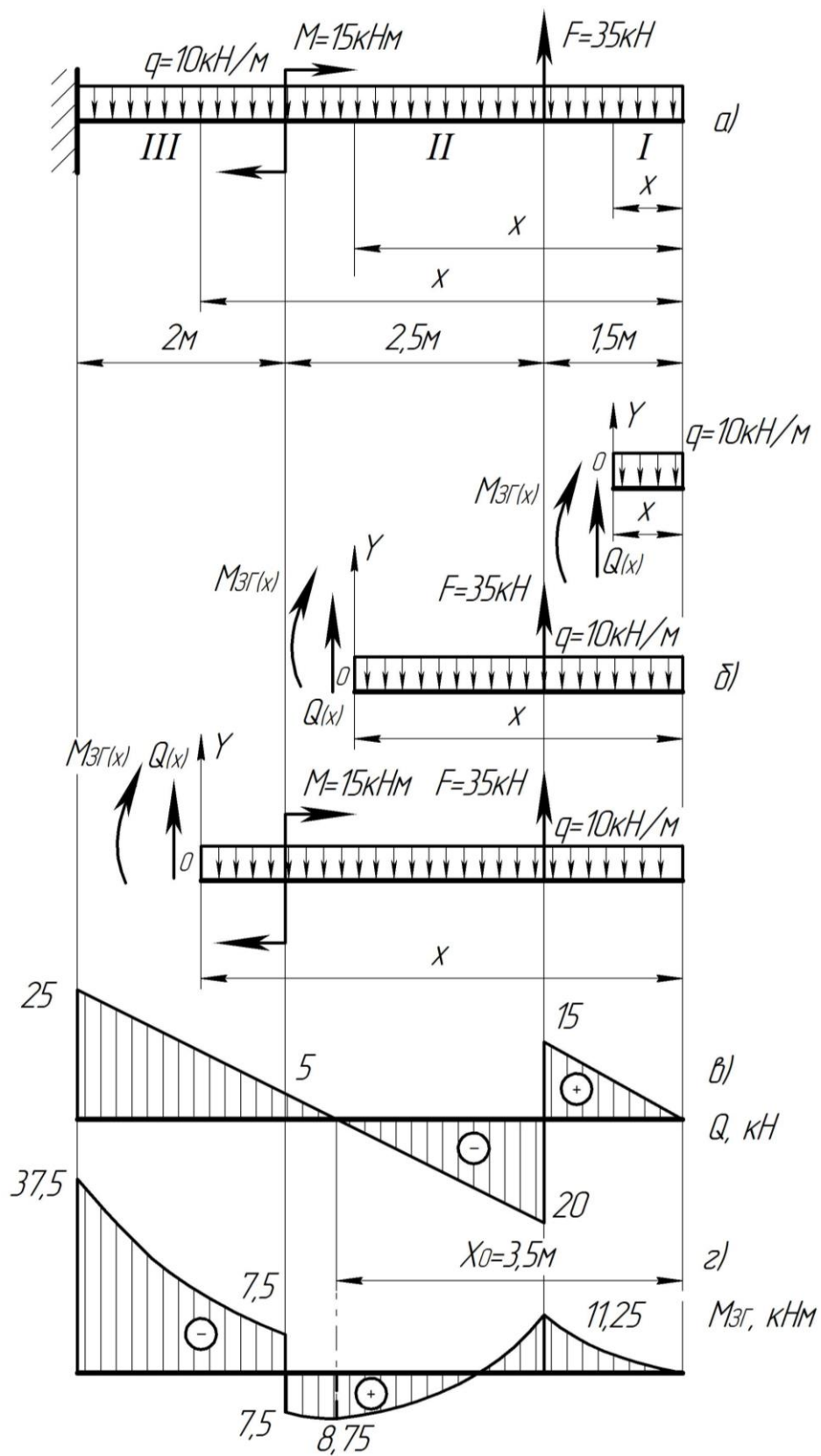


Рисунок 5.8

**Приклад розв'язування задачі №7**  
**Побудова епюр поперечних сил і згинальних**  
**моментів для балки на двох опорах, розрахунок на міцність**

Для заданої балки (рис. 5.9а) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. З умови міцності за нормальними напруженнями підібрати двотавровий перетин балки. Матеріал балки – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа.

**Розв'язування**

Використаємо розв'язок першої задачі. Сили реакцій

$$B_Y = 36,3 \text{ кН}, \quad C_Y = 48,7 \text{ кН}.$$

Викреслюємо розрахункову схему (рис. 5.9б).

Розбиваємо балку на три ділянки. Для кожної ділянки записуємо функції поперечної сили  $Q(x)$  і згинального моменту  $M_{3\Gamma}(x)$ :

ділянка I,  $0 \leq x \leq 1,5$  м (зліва),

$$Q(x) = B_Y - q \cdot x = 36,3 - 20 \cdot x;$$

$$Q(0) = 36,3 \text{ кН};$$

$$Q(1,5) = 36,3 - 20 \cdot 1,5 = 6,3 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = B_Y \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 36,3 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$M_{3\Gamma}(0) = 0;$$

$$M_{3\Gamma}(1,5) = 36,3 \cdot 1,5 - 20 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 31,95 \approx 32 \text{ кНм};$$

ділянка II,  $1,5 \text{ м} \leq x \leq 3 \text{ м}$  (зліва),

$$Q(x) = B_Y - q \cdot x + F = 36,3 - 20 \cdot x + 15;$$

$$Q(1,5) = 6,3 + 15 = 21,3 \text{ кН};$$

$$Q(3) = 36,3 - 20 \cdot 3 + 15 = -8,7 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = B_Y \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + F(x - 1,5) =$$

$$= 36,3 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2} + 15 \cdot (x - 1,5);$$

$$M_{3\Gamma}(1,5) = 32 \text{ кНм};$$

$$M_{3\Gamma}(3) = 36,3 \cdot 3 + 15 \cdot (3 - 1,5) - 20 \cdot \frac{3^2}{2} = 41,4 \text{ кНм};$$

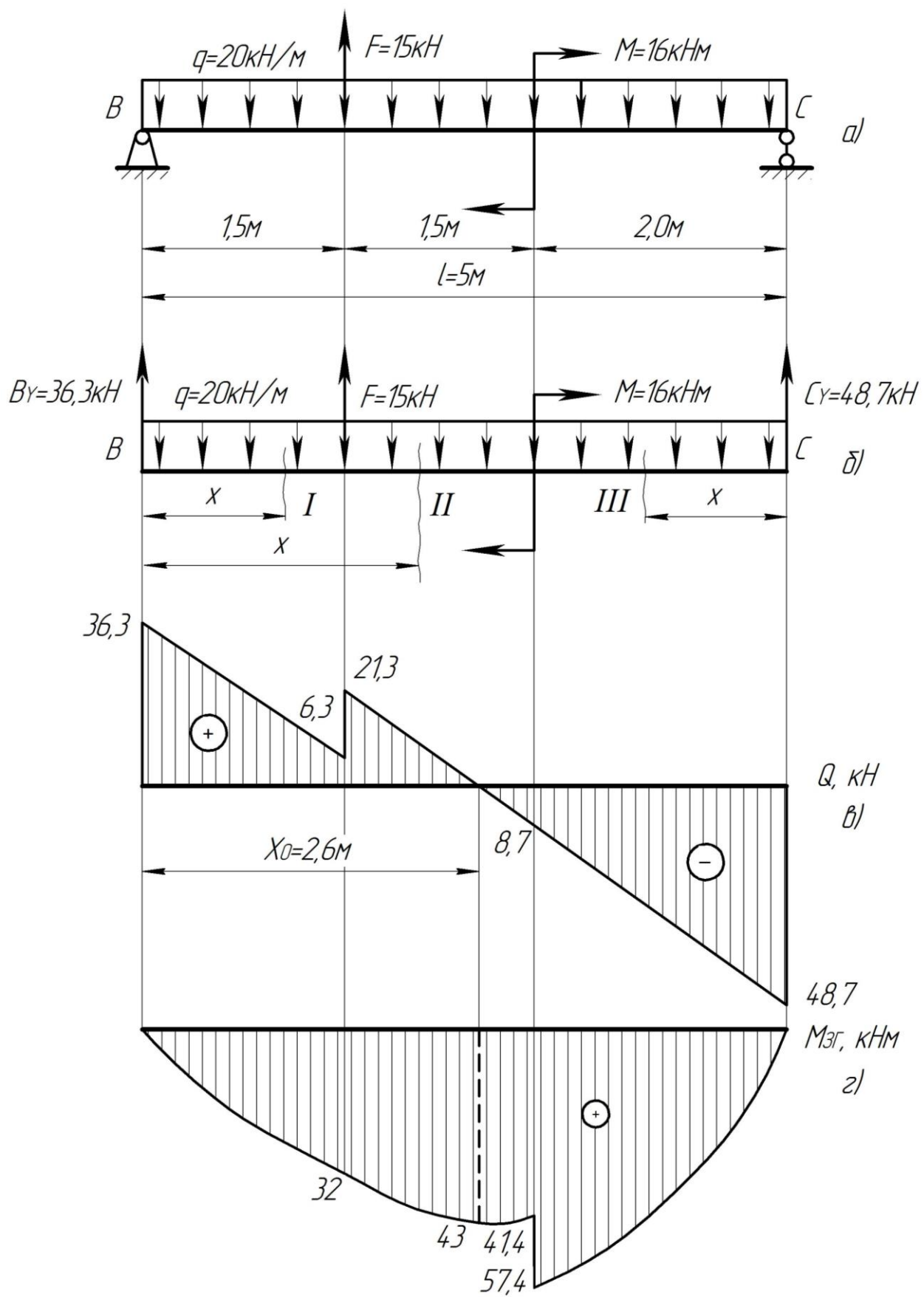


Рисунок 5.9

ділянка III,  $0 \leq x \leq 2,0$  м (справа),

$$Q(x) = -C_Y + q \cdot x = -48,7 + 20 \cdot x;$$

$$Q(0) = -48,7 \text{ кНм};$$

$$Q(2) = -48,7 + 20 \cdot 2 = -8,7 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = C_Y \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 48,7 \cdot x - 20 \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$M_{3\Gamma}(0) = 0;$$

$$M_{3\Gamma}(2,0) = 48,7 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = 57,4 \text{ кНм}.$$

Досліджуємо функцію  $M(x)$  на екстремум на II-ій ділянці

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = Q(x) = B_Y - q \cdot x_0 + F = 0,$$

звідки

$$x_0 = \frac{B_Y + F}{q} = \frac{36,3 + 15}{20} = 2,6 \text{ м}.$$

Тоді

$$M_{3\Gamma}(2,6) = M_{3\Gamma \text{ екстр}} = 36,3 \cdot 2,6 - 20 \cdot \frac{(2,6)^2}{2} + 15(2,6 - 1,5) = 43 \text{ кНм}.$$

Необхідною умовою екстремуму функції  $M_{3\Gamma}(x)$  на ділянці є нульове значення на цій ділянці  $Q(x)$ .

Будуємо епюри  $Q$  і  $M_{3\Gamma}$  (рис. 5.9в,г).

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_0} \leq [\sigma]$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору перетину

$$W_0 \geq \frac{M_{3\Gamma \max}}{[\sigma]} = \frac{57,4 \cdot 10^{-3}}{160} = 359 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

де  $M_{3\Gamma \max} = 57,4 \text{ кНм}$  – максимальний згинальний момент, що діє в перетині на балку.

Для заданої балки підбираємо поперечний перетин – двотавр №27 (ГОСТ 8239-56)  $W_{0\text{в}} = 371 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ;  $A_{0\text{в}} = 40,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  (додаток б).

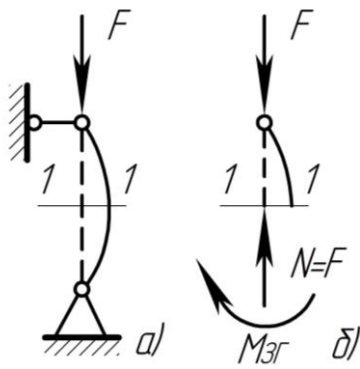
## 6. СТІЙКІСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

Умови міцності та жорсткості доповнюють умовою стійкості, яка передбачає збереження початкової форми рівноваги конструкції або окремих її елементів під дією заданого навантаження.

Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні їм стани – **критичними станами**.

Небезпека втрати стійкості виникає для тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, довгих стиснених стержнів, пластин і оболонок.

**Критична сила** – це найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержнем прямолінійної форми, називають **поздовжнім згином**.



Унаслідок викривлення осі у поперечних перетинах стержня виникають два внутрішні силові фактори – **поздовжня сила**  $N = F$  і **згинальний момент**  $M_{зг}$  (рис. 6.1). Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

Рисунок 6.1

Визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості

$$n_{cm} = F_{KP} / F.$$

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила  $F$ , яка діє на стержень, була меншою за критичну  $F_{KP}$ . Стійкість стержня достатня, якщо  $n_{cm} > 1$ . Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Для сталей  $n_{cm} = 1,8...3$ ; для чавунів  $n_{cm} = 5...5,5$ ; для дерева  $n_{cm} = 2,8...3,2$ .

Рівновага абсолютно твердого тіла може бути стійкою, байдужою і нестійкою. Аналогічно це можна віднести і до деформованого тіла.

Довгий стержень при дії осового стискуючого навантаження проходить **три форми рівноваги: стійку, байдужу та нестійку**.

Стиснений стержень перебуває у стані **стійкої** рівноваги (рис. 6.2а), якщо сила стиску  $F$  не перевищує критичного значення  $F_{KP}$ . Тобто, якщо стержень незначно зігнути якимось поперечним навантаженням, а потім

це навантаження забрати, то стержень знову вирівнюється, набуде початкове положення.

Форма рівноваги стисненого стержня є *байдужою* (рис. 6.2б), якщо сила стиску досягає певного значення, яке дорівнює критичній силі. При незначному відхиленні від початкового положення, під дією поперечної сили стержень назад не повертається.

При значенні стискуючої сили, яке перевищує критичне, прямолінійна форма рівноваги стержня стає *нестійкою*, стержень втрачає свою початкову форму (рис. 6.2в).

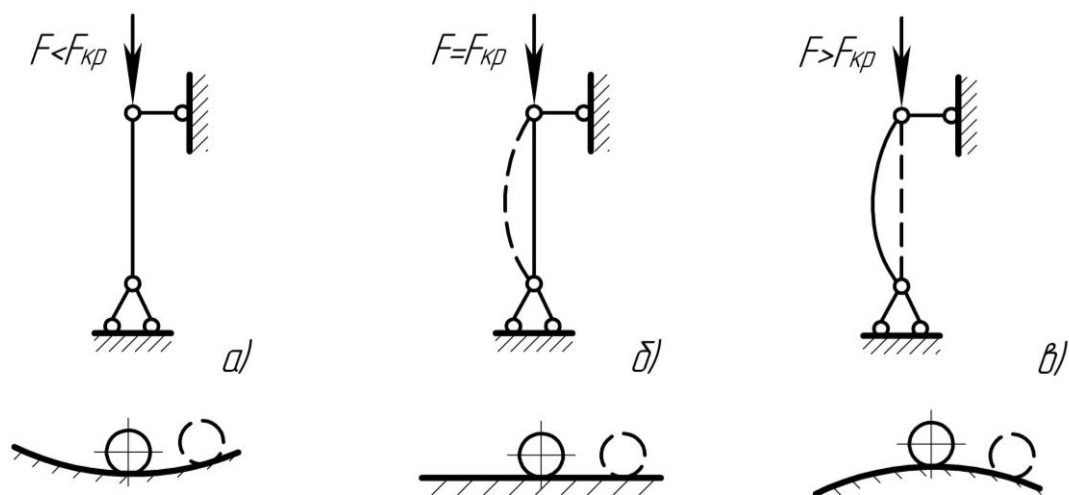


Рисунок 6.2

Втрата стійкості стержня може відбутися навіть тоді, коли напруження під дією критичної сили не досягнуло границі пропорційності.

*Найменше значення стискуючої сили, при якій стержень втрачає властивість зберігати прямолінійну форму, називають критичною*, позначають  $F_{KP}$ .

Задачу визначення величини критичної сили вперше розв'язав академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер у 1744р. **Формула Ейлера**

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де  $E$  – модуль пружності I-го роду;

$I_{\min}$  – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перетину стержня;

$\mu$  – коефіцієнт зведення довжини, залежить від способу закріплення кінців стержня;

$l$  – довжина стержня.

Варіанти закріплення кінців стержня зображено на рис. 6.3.

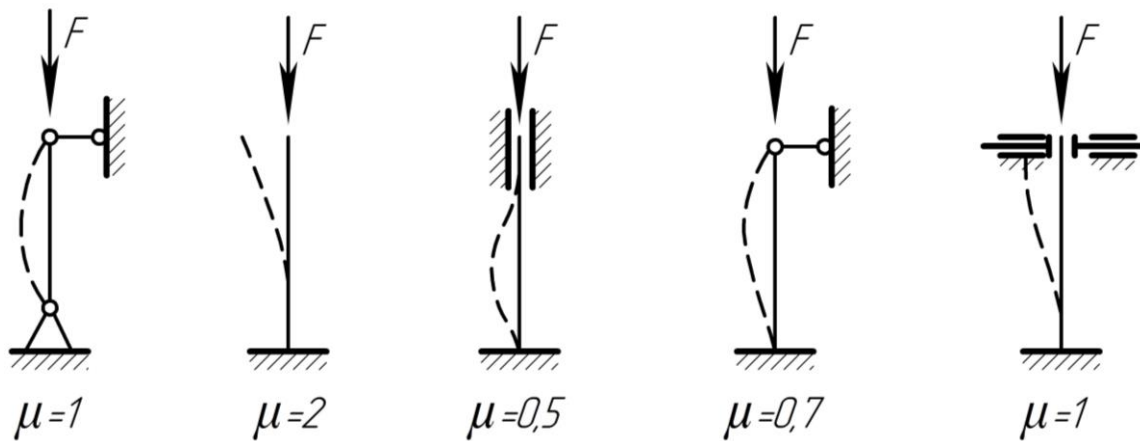


Рисунок 6.3

### Межі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

**Формула Ейлера** отримана з диференціального рівняння зігнутої осі стержня при шарнірно закріплених кінцях. Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, доки напруження у матеріалі не перевищує границю пропорційності.

$$\sigma_{KP} \leq \sigma_{m\phi}; \quad \sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_{m\phi},$$

де  $A$  – площа поперечного перетину стержня;

$\lambda_{\max}$  – максимальна гнучкість стержня, залежить від геометрії стержня, способів закріплення його кінців. Визначають її за формулою

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

де  $i_{\min}$  – мінімальний радіус інерції поперечного перетину стержня, залежить від геометричних параметрів, визначають його за формулою

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Формулу Ейлера використовують при гнучкостях, які більші за граничну гнучкість стержня  $\lambda_0$ , яка залежить від матеріалу стержня і визначають її за формулою

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{m\phi}}}.$$

**Формулу Ейлера застосовують тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості матеріалу, з якого його виготовлено,**

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0.$$

Як приклад, можна визначити граничну гнучкість для маловуглецевої сталі Ст.3, для якої  $\sigma_{\text{ти}} = 200$  МПа, модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

$$\lambda_0 = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість  $\lambda \geq 100$ . Аналогічно визначають граничну гнучкість для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну  $\lambda_0 = 80$ ; для дерева  $\lambda_0 = 110$ .

**Якщо гнучкість стержнів менша від граничної, зокрема для сталей  $\lambda = 40 \dots 100$ , для визначення напружень застосовують емпіричну формулу Ясинського**

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b \cdot \lambda_{\max},$$

де  $a, b$  – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня. Для сталі Ст.3 ці величини дорівнюють

$$a = 310 \text{ МПа}; \quad b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Якщо гнучкість  $\lambda < 40$ , стержні можна розраховувати на міцність при простому стиску, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто за формулою

$$\sigma = F/A \leq [\sigma], \quad [\sigma] = \sigma_T / n.$$

Графік залежності критичних напружень від гнучкості для стержнів, виготовлених із маловуглецевої сталі, зображено на рис. 6.4.

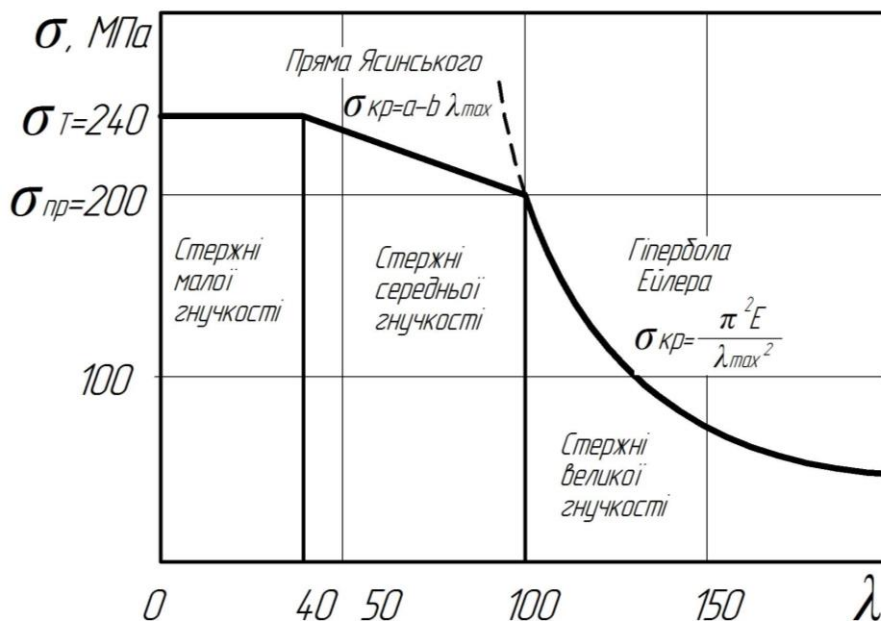


Рисунок 6.4



Зазначимо, що:

1) при малих значеннях  $\lambda$  критичне напруження дорівнює границі текучості  $\sigma_{KP} = \sigma_T$ ;

2) при середніх значеннях  $\lambda$  критичне напруження менше від границі текучості, але більше ніж границя пропорційності  $\sigma_{mц} < \sigma_{KP} < \sigma_T$ ;

3) при великих значеннях  $\lambda$  критичне напруження менше від границі пропорційності  $\sigma_{KP} < \sigma_{mц}$ .

Величину критичної сили, яку можна прикласти до стержня, отримують у такій послідовності. Визначають:

а) граничну гнучкість  $\lambda_0$ ;

б) максимальну дійсну гнучкість стержня  $\lambda_{max}$ .

в) маючи  $\lambda_0$  і  $\lambda_{max}$ , для визначення критичних напружень використовують одну з таких формул:

- при  $\lambda_{max} \geq \lambda_0$  формулу Ейлера,  $\sigma_{KP} = \pi^2 E / \lambda_{max}^2$ ;

- при  $\lambda_{cp} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_0$  формулу Ясинського,  $\sigma_{KP} = a - b \cdot \lambda_{max}$ ;

- при  $\lambda_{max} < \lambda_{cp}$ , формулу на стиск,  $\sigma_{KP} = \sigma_T$ ;

г) маючи  $\sigma_{KP}$ , знаходять  $F_{KP} = \sigma_{KP} \cdot A$ .

Допустиме значення сили, прикладеної до стержня, визначають як  $[F] = F_{KP} / n_{cm}$ .

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, як границя текучості або границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття **допустимого напруження на стійкість**  $[\sigma_{CT}]$ , що визначається як частина критичного напруження

$$[\sigma_{CT}] = \sigma_{KP} / n_{cm}.$$

Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стиску, не перевищувало допустимого напруження на стійкість

$$\sigma = \frac{F_{max}}{A} \leq [\sigma_{CT}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але й від гнучкості стержня. Тому введено поняття **коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунку на стійкість**

$$\varphi = \frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma]},$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження на міцність при стиску,  $[\sigma] = \sigma_T / n$ .

Коефіцієнт  $\varphi$  для кожного матеріалу можна визначити при будь-якому значенні гнучкості. Значення його для деяких матеріалів наведено у додатку 7.

Отже, умова стійкості

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma].$$

За допомогою умови стійкості розв'язують три типи задач.

**1. Перевірний розрахунок.** Перевірка стійкості, тобто виконання умови стійкості. Виконують у такій послідовності:

- визначають мінімальний момент інерції поперечного перетину стержня та мінімальний радіус інерції (при однаковому закріпленні у головних площинах);

- обчислюють гнучкість стержня;

- вибирають коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження  $\varphi$ ;

- отримані дані підставляють в умову стійкості й перевіряють її виконання.

**2. Визначення допустимого навантаження з умови стійкості**

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A$$

виконується аналогічно, крім останньої дії, замість якого обчислюють допустиме навантаження.

**3. Підбір поперечного перетину стержня або проектний розрахунок.**

Виконується цей розрахунок визначенням площі перетину з умови стійкості

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

Ця задача не має єдиного розв'язку, оскільки до нерівності входять дві невідомі величини: площа перетину  $A$  і коефіцієнт  $\varphi$ , який залежить від невизначених ще розмірів перетину, його форми та довжини стержня. Розв'язують задачу методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів за допомогою умови стійкості. У першому наближенні беруть довільне значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження, орієнтовно  $\varphi = 0,5 \dots 0,6$ .

Визначення розмірів поперечного перетину стержня при стійкості ускладнюється ще й тим, що наперед не відомо, в якому діапазоні буде знаходитися дійсна гнучкість стержня, тобто якою з формул потрібно користуватися: Ейлера, Ясинського чи на простий стиск.

## Задача №8

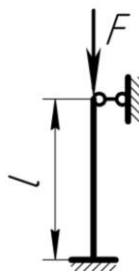
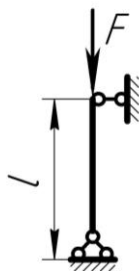
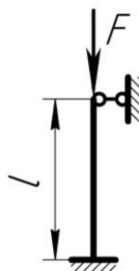
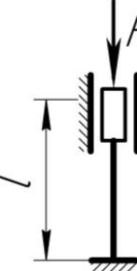
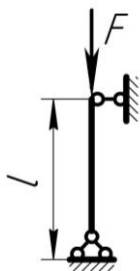
### Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рисунок до задачі 8, таблиця до задачі 8), визначити розміри поперечного перетину, критичну силу й коефіцієнт запасу стійкості. Розрахунок проводити послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження  $\varphi_1 = 0,5$ . Матеріал стержня – сталь Ст.3;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

#### *План розв'язування задачі:*

1. Накреслити задану схему, розмістивши перетин під стояком.
2. Визначити розміри поперечного перетину, користуючись таблицею коефіцієнтів зниження основного допустимого напруження (додаток 7).
3. Визначити критичну силу.
4. Визначити коефіцієнт запасу стійкості.

*Таблиця до задачі 8*

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
$F$ , кН	800	200	300	400	500	200	300	400	500	600	
$l$ , м	2,4	2,8	2,5	3,0	2,4	2,8	2,5	3,0	2,5	3,0	
Схема закріплення кінців стержня											

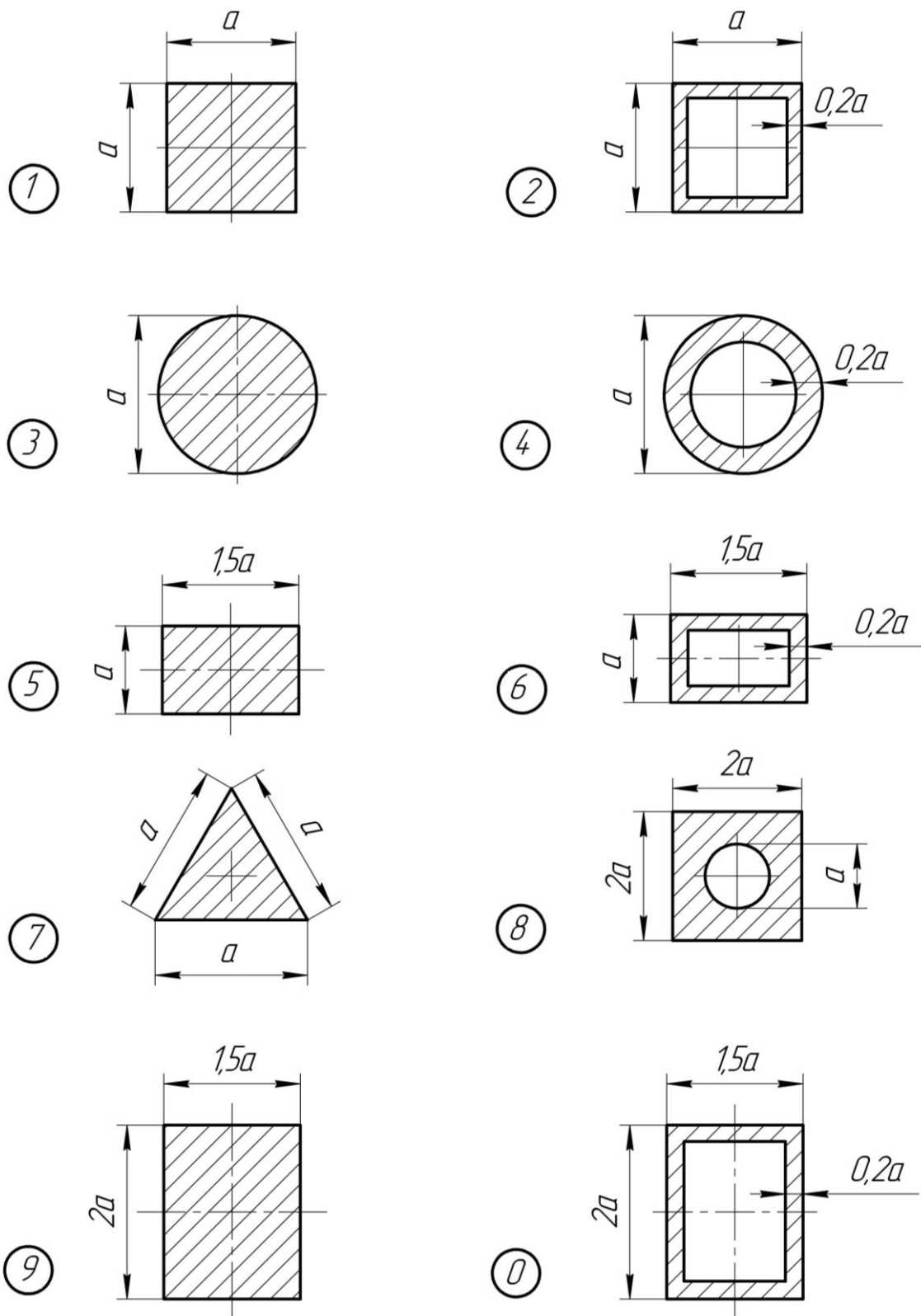


Рисунок до задачі 8

## Приклад розв'язування задачі №8

### Розрахунок на стійкість стисненого стержня

Для заданого стержня (рис. 6.5) визначити розміри поперечного перетину, критичну силу й коефіцієнт запасу стійкості. Розрахунок проводити послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом зменшення основного допустимого напруження  $\varphi_1 = 0,5$ . Матеріал стержня – сталь Ст. 3;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $F = 500$  кН;  $l = 3$  м.

### Розв'язування

Розрахунок проводимо методом послідовних наближень.

Перше наближення, приймаємо значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi_1 = 0,5$ .

З умови стійкості визначаємо площу поперечного перетину стержня

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

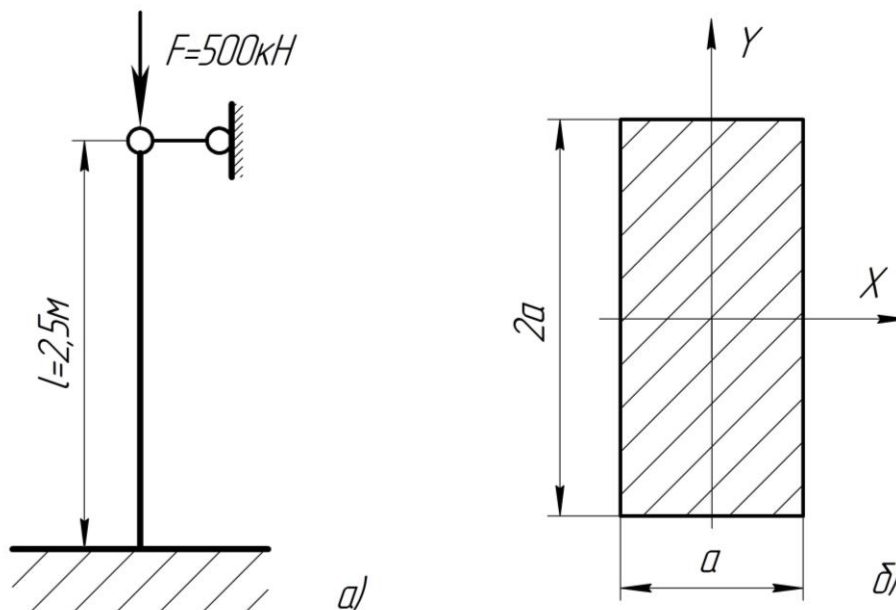


Рисунок 6.5

Для заданого поперечного перетину (рис. 6.5б) визначаємо необхідні геометричні характеристики:

- площа перетину

$$A = 2a \cdot a = 2a^2,$$

звідки

$$a = \sqrt{A/2};$$

- мінімальний осьовий момент інерції

$$I_{\min} = I_Y = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6};$$

- мінімальний радіус інерції

$$i_{\min} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{6 \cdot 2a^2}} = 0,289a;$$

- максимальна гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_Y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289a} = \frac{6,06}{a},$$

де  $\mu$  – коефіцієнт зведення довжини стержня, залежить від способу закріплення його кінців, для даної схеми (див. рис. 6.5а),  $\mu = 0,7$ .

Для першого наближення визначимо

$$a_1 = \sqrt{\frac{62,5 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,59 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_1 = \frac{6,06}{5,59 \cdot 10^{-2}} = 108.$$

З таблиці значень коефіцієнтів поздовжнього згину (див. додаток 7) знайдемо: при  $\lambda=100$ ,  $\varphi=0,60$ ; при  $\lambda=110$ ,  $\varphi=0,52$ .

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо уточнене значення коефіцієнта поздовжнього згину, що відповідає гнучкості  $\lambda_1=108$ ,

$$\varphi'_1 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 8 = 0,536.$$

Проводимо перевірку на стійкість. Визначаємо дійсне й допустиме напруження

$$\sigma_{\partial 1} = \frac{F}{A_1} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{62,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}]_1 = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,536 \cdot 160 = 85,8 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складає

$$\frac{|\left[\sigma_{cm}\right]_1 - \sigma_{\partial 1}|}{\left[\sigma_{cm}\right]_1} \cdot 100\% = \frac{85,8 - 80}{85,8} \cdot 100\% = 6,7\% > 5\% ,$$

що недопустимо.

Друге наближення, приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,536}{2} = 0,518.$$

Проводимо обчислення, аналогічні першому наближенню,

$$A_2 \geq \frac{500 \cdot 10^{-3}}{0,518 \cdot 160} = 60,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{60,3 \cdot 10^{-4}}{2}} = 5,49 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_2 = \frac{6,06}{5,49 \cdot 10^{-2}} = 110,$$

що відповідає  $\varphi'_2 = 0,52$ .

Дійсне напруження

$$\sigma_{\partial 2} = \frac{F}{A_2} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{60,3 \cdot 10^{-4}} = 82,9 \text{ МПа.}$$

Допустиме напруження

$$\left[\sigma_{cm}\right]_2 = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,52 \cdot 160 = 83,2 \text{ МПа.}$$

Недонапруження складає

$$\frac{|\left[\sigma_{cm}\right]_2 - \sigma_{\partial 2}|}{\left[\sigma_{cm}\right]_2} \cdot 100\% = \frac{83,2 - 82,9}{83,2} \cdot 100\% = 0,36\% < 5\% .$$

Отже, розмір перетину  $a=54,9$  мм.

Щоб визначити, за якою з формул (Ейлера чи Ясинського) проводити розрахунок критичної сили, визначаємо:

а) граничну гнучкість матеріалу стержня (матеріал – сталь Ст.3)

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{нц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

де  $E$  – модуль пружності,  $E=2,0 \cdot 10^5$  МПа;

$\sigma_{нц}$  – границя пропорційності,  $\sigma_{нц}=200$  МПа;

б) дійсну гнучкість стержня

$$\lambda_{\partial} = \frac{\mu \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,5}{0,289 \cdot 54,9 \cdot 10^{-3}} = 110.$$

Так як  $\lambda_{\partial} = 110 > \lambda_0 = 100$ , то критичну силу визначимо за формулою Ейлера

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot (5,49 \cdot 10^{-2})^4}{6(0,7 \cdot 2,5)} = 975 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу стійкості

$$n_{cm} = \frac{F_{KP}}{F} = \frac{975}{500} = 1,95.$$



## 7. ГНУЧКІ НИТКИ

У багатьох конструкціях, крім звичайних стержнів, застосовують тонкі елементи, котрі можуть чинити опір тільки зусиллям розтягу. Це – гнучкі дроти та канати, зокрема, повітряні лінії електричних проводів, ланцюги підвісних мостів, троси підвісних канатних доріг тощо. Такі конструктивні елементи називають **гнучкими нитками**.

Гнучкі нитки можуть бути навантажені як розподіленим, так і зосередженим навантаженнями. У більшості з них власна вага спричиняє значні напруження.

Гнучку нитку зображують стержнем, закріпленим нерухомо в точках  $K$  та  $B$  (рис. 7.1), на який діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ . Довжину  $KB$  називають **прольотом** або **прогоном** і позначають  $l$ . Під дією навантаження  $q$  гнучка нитка прогинається на величину  $f$ , яку називають **стрілою** або **стрілою провисання нитки**.

Взагалі стріла  $f$  мала порівняно з прольотом  $l$  і довжина гнучкої нитки мало відрізняється від довжини прольоту  $l$ . Тому навантаження  $q$ ,  $H/м$ , рівномірно розподілене на довжині нитки, вважають рівномірно розподіленим на довжині прольоту.

У розрахунках гнучких ниток, зокрема, повітряних ліній електричних передач, значну увагу приділяють впливу на міцність вертикального розподіленого навантаження, яке визначають за формулою

$$q = q_{вл} + q_{ож},$$

де  $q_{вл}$  – власна вага проводу,  $H/м$ , визначають її як

$$q_{вл} = \gamma \cdot A,$$

де  $\gamma$  – питома вага матеріалу гнучкої нитки (проводу),  $H/м^3$ ;

$A$  – площа поперечного перетину нитки,  $м^2$ ;

$q_{ож}$  – вага ожеледі на одиницю довжини нитки (проводу),  $H/м$ , визначають її за формулою

$$q_{ож} = 9 \cdot 10^3 \pi \cdot \delta (d + \delta).$$

Тут  $d$  і  $\delta$  – діаметр проводу і товщина ожеледі,  $м$ .

Крім вертикально розподіленого навантаження  $q$ , на провід може діяти ще й вітрове навантаження  $q_v$ ,  $H/м$ , що переважно напрямлене горизонтально. Для визначення вітрового навантаження користуються емпіричною формулою

$$q_{\text{в}} = 0,636V^2 (d + 2\delta),$$

де  $V$  – швидкість вітру, м/с.

Сумарне навантаження, Н/м, на провід визначають за формулою

$$q_{\Sigma} = \sqrt{q^2 + q_{\text{в}}^2}.$$

**Для практичних розрахунків важливим є значення стріли провисання проводу  $f$  і натяг гнучкої нитки  $H$  при забезпеченні умови міцності.**

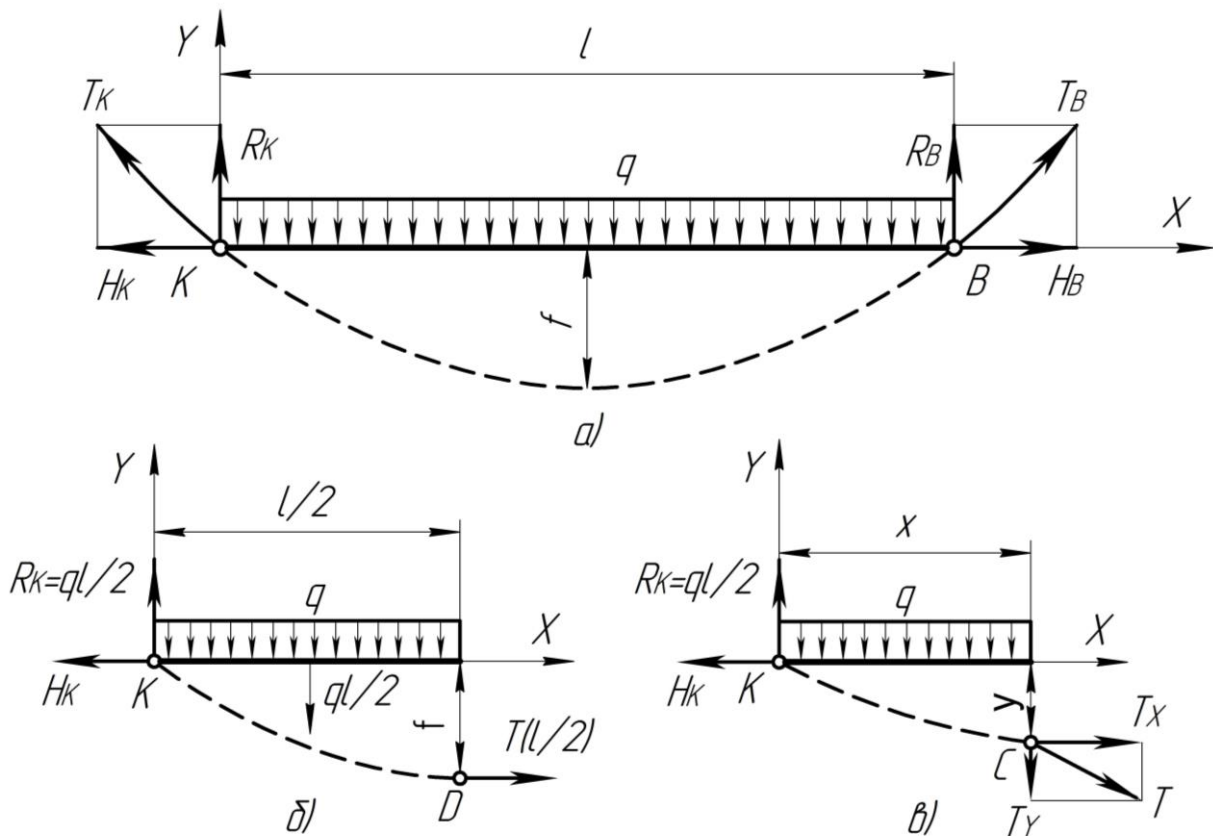


Рисунок 7.1

Точки підвісу гнучкої нитки можуть бути на одному рівні й на різних рівнях. Для обох випадків визначимо стрілу провисання, найбільше зусилля у гнучкій нитці й перевіримо її міцність.

Розглядаємо схему, коли точки підвісу  $K$  та  $B$  розташовані на одному рівні (див. рис. 7.1а). Початок координат розмістимо в точці  $K$ , вісь  $X$  спрямуємо праворуч, вісь  $Y$  – вгору. Спочатку визначимо реакції опор нитки в точках  $K$  та  $B$  ( $T_K$ ,  $T_B$ ). Розкладемо ці реакції на вертикальну та горизонтальну складові ( $R_K$ ,  $R_B$  та  $H_K$ ,  $H_B$ ). Для визначення чотирьох невідомих використовуємо три рівняння для всієї нитки в цілому:

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; & -H_K + H_B &= 0; & H_K &= H_B; \\ \sum M_D(F) &= 0; & -R_K \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot \frac{l}{2} &= 0; & R_K &= R_B; \\ \sum F_Y &= 0; & R_K - q \cdot l + R_B &= 0; & R_K &= R_B = \frac{q \cdot l}{2}.\end{aligned}$$

Отже, горизонтальні складові реакції однакові, але їхнє значення невідоме. Для визначення його потрібно скласти додаткове рівняння, яке можна отримати з умови, що нитка гнучка, тобто розглядатимемо нитку як таку, що зазначає тільки деформації розтягу. Тому сили взаємодії між двома частинами нитки зводяться до зусилля, спрямованого по дотичній до кривої прогину. Це дає змогу розглядати кожен точку нитки як шарнір і записати додаткове рівняння рівноваги для частини нитки, що розміщена праворуч або ліворуч від цього шарніра. Сума моментів сил, що діють на цю частину нитки відносно довільної точки, дорівнює нулю.

Розглянемо ліву частину нитки (див. рис. 7.1б) і запишемо рівняння

$$\sum M_D(F) = 0; \quad -R_K \cdot \frac{l}{2} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} + H \cdot f = 0,$$

звідки горизонтальна складова реакції, яку називають **натягом нитки**, буде

$$H = \frac{q \cdot l^2}{8f}. \quad (7.1)$$

Ця формула є наближеною, оскільки ми припустили, що навантаження  $q$  розподілене рівномірно на довжині прольоту, а не на довжині нитки, як це є насправді.

Розглянемо рівновагу гнучкої нитки (проводу), що підвішена у двох точках  $K$  та  $B$  на різних рівнях (рис. 7.2а). Нитка знаходиться під дією розподіленого навантаження  $p$ , Н/м. Горизонтальна проекція  $l$  дуги  $KB$  – під дією навантаження  $q$ , Н/м. Якщо  $ds$  – елемент дуги нитки (рис. 7.2б), а  $dx$  – його горизонтальна проекція, то навантаження, що припадає на цей елемент, може бути представлена або як  $pds$ , або як  $pdx$ . Тому

$$pds = pdx, \quad p = q \frac{dx}{ds} = q \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут нахилу дотичної до дуги нитки.

Вважають, що провисання нитки незначне порівняно з її прольотом (довжина нитки  $s$  не перевищує довжини прольоту  $l$  більше, ніж на 10%, а  $\cos \alpha \approx 1$ ). Тому вагу нитки можна рівномірно розподілити на довжині прольоту  $l$ .

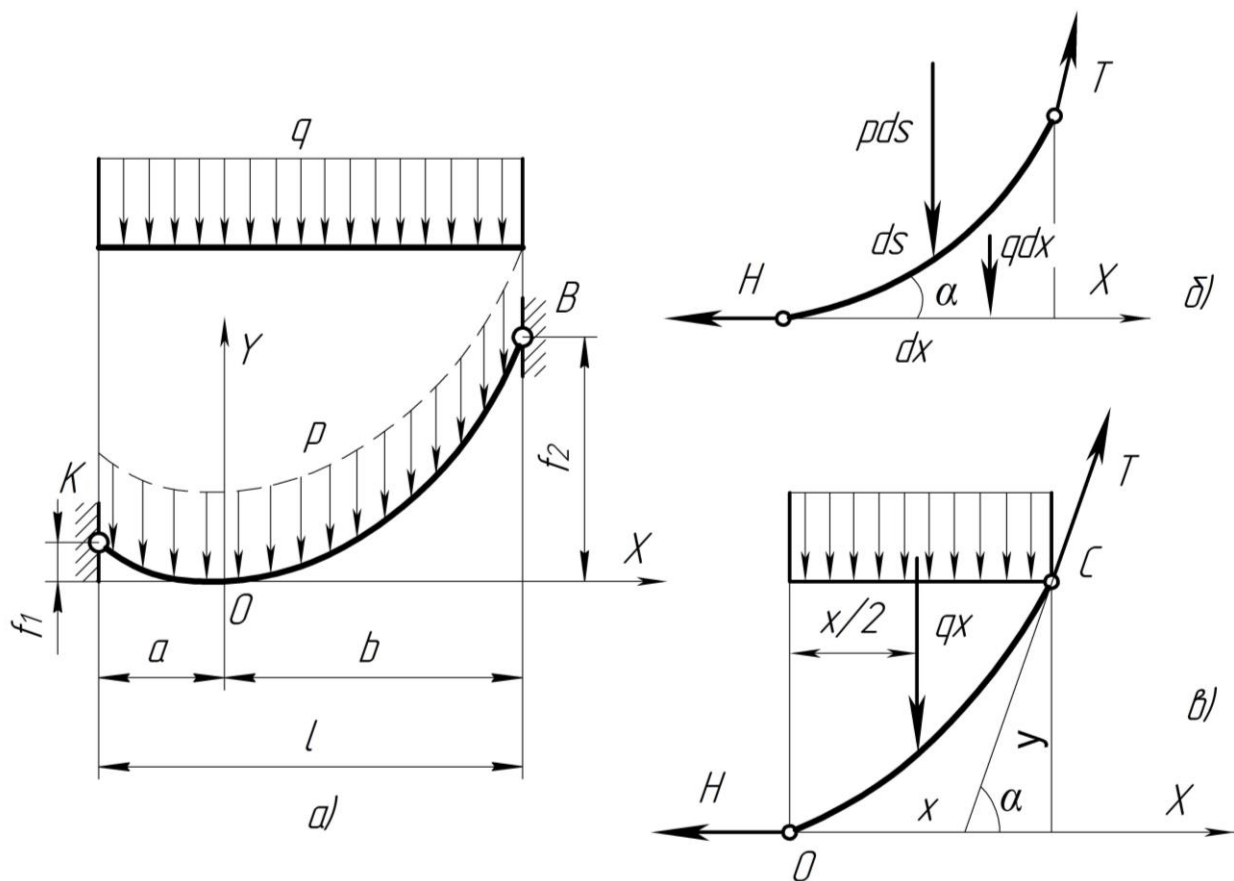


Рисунок 7.2

Розмістимо початок системи координат у найнижчій точці провисання гнучкої нитки та розглянемо рівновагу її частини (рис. 7.2в). Оскільки нитка чинить опір тільки розтягу, то сили  $H$  і  $T$  на кінцях виділеної частини діють тільки в напрямку дотичної, а згинальний момент в усіх її перетинах дорівнює нулю. Запишемо рівняння рівноваги

$$\sum (M)_C = H \cdot y - qx \cdot \frac{x}{2} = 0,$$

з якого отримаємо рівняння кривої (що є параболою) провисання нитки

$$y = \frac{qx^2}{2H}. \quad (7.2)$$

У випадку, коли точки підвісу  $K$  і  $B$  знаходяться на одному рівні (див. рис. 7.1а), **стріла провисання нитки**  $f = f_1 = f_2 = y_{\max}$  і визначають її на довжині  $x = l/2$  за формулою

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8H}. \quad (7.3)$$

Якщо записати рівняння рівноваги виділеної частини нитки на вісь  $X$  (див. рис. 7.2в), то з нього отримаємо залежність між горизонтальним натягом нитки  $H$  та натягом  $T$  у довільній точці

$$\sum X = -H + T \cos \alpha = 0; \quad T = \frac{H}{\cos \alpha}. \quad (7.3)$$

З аналізу формули (7.3) бачимо, що найбільша сила натягу виникає у точках підвішування нитки. Водночас для підвішення нитки на одному рівні, коли  $f \ll l$ , а  $\cos \alpha \approx 1$ , приймають  $H \approx T$ . Доведемо це.

Визначивши реакції у точках кріплення гнучкої нитки, можемо знайти зусилля у будь-якому перетині нитки. Розріжемо нитку в точці на відстані  $x$  і розглянемо рівновагу лівої частини (див. рис. 7.1в), на яку діють реакції  $R_K$ ,  $H$ , навантаження  $q$  та зусилля в нитці  $T$ . Умови рівноваги відрізаної частини такі:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0; \quad -H + T_X = 0; \quad T_X = H = \frac{q \cdot l^2}{8f}; \\ \sum F_Y = 0; \quad R_K - qx - T_Y = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$T_Y = \frac{q \cdot l}{2} - qx = q \left( \frac{l}{2} - x \right).$$

З отриманих формул випливає, що горизонтальна складова зусилля  $T_X$  у кожній точці нитки дорівнює натягу нитки  $H$ . Вертикальна проекція зусилля  $T_Y$  дорівнює нулю всередині прольоту і досягає найбільшого значення  $T_Y = q \cdot l/2$  біля опор.

Повне зусилля в нитці визначають за формулою

$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2} = \sqrt{H^2 + q^2(l/2 - x)^2}.$$

Найбільше значення повного зусилля в нитці буде при  $x = 0$  та  $x = l$ , тобто біля опор. Визначають його за формулою

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{q^2 \cdot l^2}{4}} = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}.$$

Оскільки гнучкі нитки працюють на розтяг, то найбільше напруження у матеріалі нитки можна визначити за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{T_{\max}}{A} = \frac{H}{A} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}.$$

### Умова міцності при розрахунку гнучких ниток

$$\sigma_{\max} = \frac{H}{A} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \leq [\sigma], \quad (7.4)$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження на розтяг для матеріалу гнучкої нитки.

При малих значеннях  $f/l$  величиною  $16f^2/l^2$  можна знехтувати, відповідно **умову міцності** запишемо так:

$$\sigma_{\max} = \frac{H}{A} = \frac{q \cdot l^2}{8f \cdot A} \leq [\sigma]. \quad (7.5)$$

У разі навантаження проводу тільки власною вагою, тобто інтенсивністю  $q_{вл} = \gamma \cdot A$  умова міцності буде

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma \cdot l^2}{8f} \leq [\sigma]. \quad (7.6)$$

З умови міцності можна визначити потрібну стрілу провисання гнучкої нитки:

– при рівномірно-розподіленому навантаженні

$$f_{\min} = \frac{q \cdot l^2}{8A \cdot [\sigma]}; \quad (7.7)$$

– при врахуванні тільки власної ваги проводу

$$f_{\min} = \frac{l^2}{8[\sigma]_{\text{num}}}, \quad (7.8)$$

де  $\sigma_{\text{num}}$  – допустима *питома міцність матеріалу*,  $\sigma_{\text{num}} = [\sigma]/\gamma$ , м.

Отже, на розрахункову величину стріли провисання проводу не впливає площа його перетину, а міцність ліній електропроводу з алюмінію ( $\sigma_{\text{num}}^a = 21 \cdot 10^3$  м) є навіть дещо вища, ніж міцність аналогічних ліній зі сталевих сплавів ( $\sigma_{\text{num}}^c = 19 \cdot 10^3$  м).

Для визначення залежності довжини нитки  $s$  (див. рис. 7.2б) від стріли провисання  $f$  та довжини прольоту  $l$  можна скористатися відомою формулою з диференціальної геометрії для довжини елемента кривої

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Інтегрування цієї залежності у межах дуги  $KB$  призводить до такого наближеного результату:

$$s \approx l + \frac{8f^2}{3l}. \quad (7.9)$$

Якщо точки підвісу гнучкої лінії знаходяться на різних рівнях (див. рис. 7.2а), то потрібно визначати стрілу провисання у двох точках. У рівняння кривої провисання нитки (7.2) підставимо значення  $x = -a$  та  $x = b$ , знайдемо величини  $f_1$  і  $f_2$ :

$$f_1 = \frac{q \cdot a^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{q \cdot b^2}{2H}. \quad (7.10)$$

Враховуючи, що  $a + b = l$ , виразимо сталі  $a$  і  $b$  через величини  $l$ ,  $f_1$  і  $f_2$ . Для цього розділимо першу і другу рівності (7.10) й отримаємо

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{або} \quad a = \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

$$\text{У результаті} \quad l = b \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \quad \text{або} \quad b = \frac{l \sqrt{f_2}}{\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1}}.$$

Використавши отримані залежності, визначимо з другого рівняння (7.10) величину натягу гнучкої нитки

$$H = \frac{q \cdot b^2}{2f_2} = \frac{q \cdot l^2}{(\sqrt{2f_2} \pm \sqrt{2f_1})^2}. \quad (7.11)$$

Знак «мінус» у формулі (7.11) відповідає окремому випадку, коли найнижча точка провисання нитки лежить за межами прольоту. З аналізу формули (7.11) бачимо також, що для випадку  $f_1 = f_2 = f$  отримуємо попередній результат (7.3).

Розглянемо заміну довжини проводу (гнучкої нитки) залежно від зміни зусилля розтягу  $H$  при підвищенні температури від  $t$  до  $t_1$  градусів. При такій зміні з'явиться новий натяг  $H_1$ , нова довжина проводу  $s_1$  та нова стріла провисання  $f_1$ . Різниця між новою довжиною проводу та прогоном  $s_1 - l$  складатиметься:

– із початкової різниці  $s - l$ ;

- видовження від температури  $\Delta l_t = a(t_1 - t)l$ ;
- вкорочення  $\Delta_{H-H_1}$ , зумовленого тим, що натяг проводу зменшиться на величину  $H - H_1$  унаслідок збільшення його стріли провисання.

У результаті отримаємо геометричне рівняння деформації проводу

$$s_1 - l = s - l + \Delta l_t - \Delta_{H-H_1}.$$

Підставивши в отримане рівняння відповідні значення різниць  $s_1 - l$  та  $s - l$  (формула (7.9)) та значення видовження, отримаємо нове рівняння деформації у фізичній формі

$$\frac{8f_1^2}{3l} = \frac{8f^2}{3l} + \alpha(t_1 - t)l - \frac{(H - H_1)l}{E \cdot A}, \quad (7.12)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу.

Враховуючи, що натяг  $H_1 = \frac{q \cdot l^2}{8f_1}$ , після деяких алгебраїчних перетворень отримаємо кубічне рівняння для визначення нової стріли провисання проводу при впливі температур  $f_1$

$$f_1^3 - r \cdot f_1 - \kappa = 0. \quad (7.13)$$

$$\text{Тут } r = f^2 + \frac{3}{8} \left( a(t - t_{\min})l^2 - \frac{H \cdot l^2}{E \cdot A} \right); \quad \kappa = \frac{3}{64} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot A}.$$

Розв'язок кубічного рівняння (7.13) можна шукати методом послідовних наближень, графічним або аналітичним методом, через розв'язок Кардано.

**Контроль за зміною величини стріли провисання необхідний для забезпечення міцності проводу повітряних ліній електропередач за умови визначення допустимої величини  $f_{\min}$ , а також для встановлення необхідної висоти точок підвішування проводу за умовою**

$$h \geq f_{\max} + [h], \quad (7.14)$$

де  $[h]$  – допустима висота проводу над землею, яка допускається нормами безпеки.



## Задача №9

### Визначення стріли провисання електроводу

Багатожильний мідний електровід перетином  $A$ , діаметр дроту  $d$  при температурі  $t = 24^\circ\text{C}$  підвішений до опор, що розташовані на одному рівні (рисунок до задачі 9). Відстань між опорами – прольот  $l$  (таблиця до задачі 9). Допустиме напруження на розтяг для проводу  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ ; коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ; модуль пружності матеріалу проводу  $E = 1,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; питома вага міді  $\gamma_m = 91 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ . Електровід працює при температурі  $t_{\min} = -20^\circ\text{C}$ .

Потрібно визначити мінімальну стрілу провисання  $f_{\min}$  проводу за умови забезпечення його міцності, а також стрілу провисання  $f_1$  в умовах підвішування проводу.

#### План розв'язування задачі:

1. Визначити навантаження від власної ваги електроводу.
2. Визначити навантаження електроводу від ожеледі.
3. Визначити повне навантаження електроводу.
4. Визначити мінімальну стрілу провисання проводу з умови міцності на розтяг.
5. Визначити натяг проводу.
6. Визначити стрілу провисання проводу в умовах підвішування.

*Таблиця до задачі 9*

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$A, \text{ мм}^2$	120									
$d, \text{ мм}$	14,2									
$l, \text{ м}$	40	50	60	70	90	100	110	120	130	140

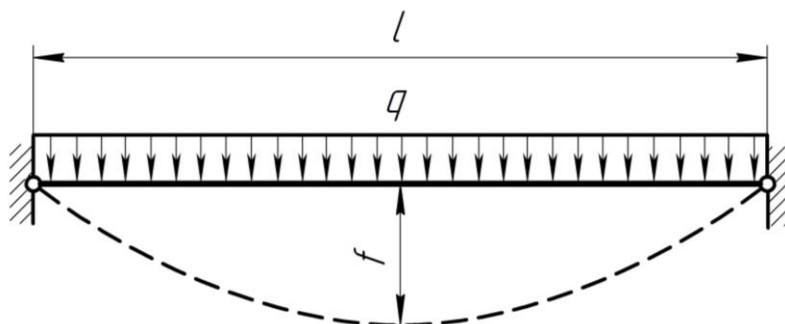


Рисунок до задачі 9

## Приклад розв'язування задачі №9

### Визначення стріли провисання електропроводу

Багатожильний електропровід перетином  $A = 120 \text{ мм}^2$ , діаметр дроту  $d = 14,2 \text{ мм}$  при температурі  $t = 24^\circ \text{C}$  підвішений до опор, що розташовані на одному рівні (рисунок до задачі 9). Відстань між опорами – прольот  $l = 80 \text{ м}$ . Допустиме напруження на розтяг для проводу  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ ; коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ; модуль пружності матеріалу проводу  $E = 1,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; питома вага міді  $\gamma_m = 91 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ . Електропровід працює при температурі  $t_{\min} = -20^\circ \text{C}$ .

Потрібно визначити мінімальну стрілу провисання  $f_{\min}$  проводу за умови забезпечення його міцності, а також стрілу провисання  $f_1$  в умовах підвішування проводу.

### *Розв'язування*

Навантаження на електропровід від власної ваги проводу

$$q_{вл} = \gamma_m \cdot A = 91 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 11,3 \text{ Н/м}.$$

Електропровід працює при температурі до  $t_{\min} = -20^\circ \text{C}$ , тому визначимо навантаження проводу від ожеледі

$$q_{ож} = 9 \cdot 10^3 \pi \cdot \delta (d + \delta) = 9 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 10 (14,2 + 10) \cdot 10^{-6} = 6,84 \text{ Н/м}.$$

Повне навантаження на один 1м довжини обмерзлого проводу

$$q_{\Sigma} = q_{вл} + q_{ож} = 11,3 + 6,84 = 18,14 \text{ Н/м}.$$

Знаходимо мінімальну стрілу провисання проводу  $f_{\min}$  з умови міцності його на розтяг

$$f_{\min} = \frac{q_{\Sigma} \cdot l^2}{8A \cdot [\sigma]} = \frac{18,14 \cdot (80)^2}{8 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^6} = 1,51 \text{ м}.$$

Знайдемо стрілу провисання, яку потрібно надати проводу при підвішуванні. Для цього використаємо кубічне рівняння для визначення нової стріли провисання  $f_1$

$$f_1^3 - r \cdot f_1 - \kappa = 0.$$

$$\text{Тут } r = f^2 + \frac{3}{8} \left( \alpha (t - t_{\min}) l^2 - \frac{H \cdot l^2}{E \cdot A} \right); \quad \kappa = \frac{3}{64} \cdot \frac{q_{\text{вл}} \cdot l^4}{E \cdot A}.$$

Підставляємо необхідні дані. Вважатимемо, що провід при монтажі навантажений власною вагою  $q = q_{\text{в}} = 11,3 \text{ Н/м}$ .

Визначимо натяг проводу

$$H_{\Pi} = [\sigma] \cdot A = 80 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 9,6 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Стріла провисання при сумарному навантаженні на електропровід

$$f = f_{\min} = 1,51 \text{ м.}$$

Підставивши дані, отримаємо

$$f_1^3 - \left[ 1,51^2 + \frac{3}{8} \left( 17 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 80^2 - \frac{9,6 \cdot 10^3 \cdot 80^2}{1,3 \cdot 10^5 \cdot 120} \right) \right] f_1 - \frac{3}{64} \cdot \frac{11,3 \cdot 80^4}{1,3 \cdot 10^5 \cdot 120} = 0$$

або

$$f_1^3 - 2,125 f_1 - 1,39 = 0.$$

Для знаходження дійсного кореня кубічного рівняння скористаємося формулою Кардано

$$f_1 = u + v,$$

$$\text{де } u = \sqrt[3]{\kappa/2 + \sqrt{D}}; \quad v = \sqrt[3]{\kappa/2 - \sqrt{D}}; \quad D = -(r/3)^3 + (\kappa/2)^2;$$

$$\text{тут } \kappa = 1,39; \quad r = 2,125.$$

Підставивши дані, отримаємо

$$D = -(2,125/3)^3 + (1,39/2)^2 = 0,1276 > 0.$$

Кубічне рівняння має тільки один дійсний корінь

$$f_1 = \sqrt[3]{1,39/2 + \sqrt{0,1276}} + \sqrt[3]{1,39/2 - \sqrt{0,1276}} = 1,017 + 0,696 = 1,713 \text{ м.}$$

Отже, стріла провисання проводу на момент його монтажу повинна дорівнювати  $f_{\text{м}} = f_1 = 1,713 \text{ м}$ .

## 8. ЕНЕРГО-КІНЕМАТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ПРИВОДА

Мета цього розрахунку – вибір електродвигуна та визначення вихідних даних для розрахунку передач, що входять до складу привода. Студент повинен вивчити типи електродвигунів змінного струму, можливості різних передач для реалізації загального передаточного відношення привода.

### Вихідні дані

Привод є частиною машини. Вихідні дані для його розрахунку визначають із технологічних, тягових та інших розрахунків машини, умови експлуатації якої задає замовник і вказує на робочому валу привода (приводному валу машини). Це можуть бути:

- **колове зусилля**  $F_t$ , Н, прикладене до приводної ланки машини (барабана, зірочки, шківа, шнека і т. ін.);
- **діаметр**  $d$ , м, цієї ланки, для приводної зірочки він дорівнює

$$d = \frac{p}{\sin \frac{180^\circ}{z}},$$

де  $p$  – крок зірочки (тягового ланцюга);

$z$  – число зубців приводної зірочки;

- **колова швидкість**  $V$ , м/с, приводної ланки (швидкості руху ланцюга, стрічки й т. ін.);
- **потужність**  $P_{нв}$ , кВт, на приводному валу;
- **обертальний момент**  $T_{нв}$ , Нм, на приводному валу;
- **кутова швидкість**  $\omega_{нв}$ , рад/с, або **частота обертання**  $n_{нв}$ , об/хв, приводного вала.

### 8.1. Енерго-кінематичні параметри на приводному валу

**Потужність**, кВт, на приводному валу може бути задана у вихідних даних або її визначають за однією з формул:

$$P_{нв} = \frac{F_t \cdot V}{1000};$$

$$P_{нв} = \frac{T_{нв} \cdot \omega_{нв}}{1000};$$

$$P_{нв} = \frac{T_{нв} \cdot n_{нв}}{9550}.$$

**Обертальний момент**, Нм, на приводному валу може бути заданим у вихідних даних або його визначають за однією з формул:

$$T_{нв} = F_t \cdot d / 2;$$

$$T_{нв} = \frac{1000 P_{нв}}{\omega_{нв}};$$

$$T_{нв} = \frac{9550 P_{нв}}{n_{нв}}.$$

**Частота обертання**, об/хв, приводного вала може бути заданою у вихідних даних або її визначають за однією з формул:

$$n_{нв} = \frac{30 \omega_{нв}}{\pi};$$

$$n_{нв} = \frac{60 V}{\pi \cdot d}.$$

## 8.2. Тип електродвигуна і його швидкохідність

У приводах машин найчастіше використовують трифазні асинхронні електродвигуни змінного струму.

Швидкохідність двигуна (частоту обертання його ротора) вибирають з умови оптимальної вартості привода. Швидкохідніший двигун має менші розміри, масу і вартість, але при цьому для реалізації передаточного відношення привода необхідно збільшувати розміри передач та їх кількість.

Синхронну частоту обертання ротора, об/хв, тобто частоту обертання магнітного поля, визначають за формулою

$$n_c = \frac{60 f}{P_{пол}},$$

де  $f$  – частота струму в мережі,  $\text{с}^{-1}$ ;

$P_{пол}$  – число пар полюсів.

При стандартній частоті  $f = 50 \text{ с}^{-1}$  і числі пар полюсів 1; 2; 3; 4 синхронна частота обертання відповідно дорівнює 3000; 1500; 1000; 750 об/хв.

З метою скорочення діапазону передаточних відношень у курсових проектах (роботах) рекомендується приймати  $n_c = 1500$  об/хв або  $n_c = 1000$  об/хв як найпоширеніші.

### 8.3. Склад передач і кінематична схема привода

Якщо кінематична схема привода наведена в технічному завданні на проект (роботу), то п. 8.1.3 пропускають.

#### Попереднє передаточне відношення привода

Попереднє передаточне відношення (число) привода у загальному випадку визначають за формулою

$$i = u = \frac{n_c}{n_{nv}}.$$

#### Склад передач привода

Склад передач привода призначають на основі величини попереднього передаточного відношення. До складу привода входять редуктор, тип якого вказують у завданні, й одна-дві передачі з гнучким зв'язком (пасова чи ланцюгова) або відкрита зубчаста передача.

Склад передач привода вибирають так, щоб добуток середніх значень передаточних відношень передач, наведених у табл. 8.1, приблизно дорівнював попередньому відношенню привода.

Таблиця 8.1 – Середні значення передаточних відношень (чисел) та ККД передач

Тип передачі		$i(u)$	$\eta$
Закрита зубчаста	Циліндрична	3...5	0,96...0,98
	Конічна	2...4	0,95...0,97
Відкрита зубчаста	Циліндрична	4...7	0,92...0,94
	Конічна	3...4	0,91...0,93
Черв'ячна	З однозахідним черв'яком	30...80	0,7...0,75
	З двозахідним черв'яком	16...30	0,75...0,85
	З чотиризахідним черв'яком	8...16	0,85...0,9
Ланцюгова		2...4	0,91...0,93
Пасова		2...4	0,94...0,96

Передаточне відношення (число) редукторів рекомендовано приймати:

- одноступінчастого циліндричного  $i_p = u_p = 2...6$ ;
- двоступінчастого циліндричного  $i_p = u_p = 10...30$ ;
- конічного  $i_p = u_p = 2...4$ ;
- двоступінчастого конічно-циліндричного  $i_p = u_p = 8...20$ ;
- черв'ячного  $i_p = u_p = 8...60$ .

Значення ККД передач наведено у табл. 8.1 без урахування втрат у підшипниках. ККД однієї пари підшипників кочення  $\eta_{нкч} = 0,99...0,995$ ; однієї пари підшипників ковзання  $\eta_{нкз} = 0,98...0,999$ , ККД муфти  $\eta_m = 0,98$ .

### **Кінематична схема привода**

Кінематичну схему привода складають відповідно до вимог стандартів.

При складанні схеми рекомендовано пасову передачу розташовувати біля двигуна, а ланцюгову чи відкриту зубчасту – після редуктора. Швидкохідні вали рекомендовано з'єднувати пружними муфтами, тихохідні – жорсткими.

Вали нумерують, починаючи від двигуна, римськими цифрами, а передачі в тому ж порядку – арабськими. Вали, з'єднані муфтою, вважають кінематично єдиним валом.

Вибрана схема обов'язково повинна бути узгоджена з керівником курсової роботи (проекту).

## **8.4. Вибір типорозміру електродвигуна**

У приводах машин використовуються трифазні асинхронні електродвигуни серії 4А (додатки 8 і 9). У майбутньому ці двигуни будуть замінювати двигунами нової серії АІР, розробленої в країнах, що входять до Інтерелектро. Ці двигуни мають кращі енергетичні показники, вищу надійність і меншу металоємність.

### **Розрахункова потужність електродвигуна**

Розрахункову потужність електродвигуна для тривалого режиму роботи визначають за формулою

$$P_{\text{дв}} = \frac{P_{\text{нв}}}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_n} = \frac{P_{\text{нв}}}{\eta_{\text{заг}}},$$

де  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  – ККД окремих передач, що входять до складу привода (середні значення наведено у табл. 8.1);  
 $\eta_{заг}$  – загальний ККД привода.

### **Типорозмір електродвигуна**

Його вибирають відповідно до прийнятої синхронної частоти обертання ротора за умовою

$$P_{дв} \leq P_{ном},$$

де  $P_{ном}$  – номінальна потужність двигуна, тобто максимальна потужність, при якій двигун може довго працювати, не перегріваючись.

Для асинхронних електродвигунів допускається довгочасне перевантаження, що не перевищує номінальне більше, ніж на 5%.

Із *додатка 8* виписують тип двигуна і його технічні дані: номінальну потужність, частоту обертання ротора (при номінальному навантаженні), відношення  $T_{мах} / T_{ном}$ .

Основні розміри двигуна, необхідні для креслення загального виду привода, виписують із *додатка 9*.

### **8.5. Загальне передаточне відношення (число) привода**

Його визначають за формулою

$$i = u = \frac{n_{дв}}{n_{пв}},$$

де  $n_{дв}$  – частота обертання ротора вибраного електродвигуна (*додаток 8*).

### **8.6. Розподіл загального передаточного відношення привода**

Розподіл загального передаточного відношення (числа) привода між його передачами виконують відповідно до рекомендацій табл. 8.1 за формулою

$$i_{заг} = u_{заг} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n.$$

Розраховане значення передаточних відношень ступенів редукторів заокруглюють до найближчих стандартних (ГОСТ 2185-66):

**1; (1,12); 1,25; (1,4); 1,6; (1,8); 2,0; (2,24); 2,50; (2,80); 3,15; (3,55); 4,0; (4,5); 5,0; (5,6); 6,3; (7,1); 8,0; (9,0); 10,0; (11,2); 12,5.**

Перевагу надавати числам без дужок.



Із цього ж ряду вибирають передаточні відношення (числа) одноступінчастих циліндричних та конічних редукторів і відкритих зубчастих передач.

Для двоступінчастого редуктора, виконаного за розгорнутою схемою, рекомендують приймати передаточне відношення тихохідного ступеня  $i_m = 0,88 \sqrt{i_p}$ , для циліндричного співвісного редуктора –  $i_m = 0,95 \sqrt{i_p}$ , для конічно-циліндричного редуктора  $i_m = 1,1 \sqrt{i_p}$ , де  $i_p$  – попередньо вибране передаточне відношення редуктора.

Передаточне відношення швидкохідного ступеня  $i_{ш} = i_p / i_m$ .

Для черв'ячних редукторів бажано приймати передаточні відношення із такого ряду: 8; 9; 10; 11,5; 12,5; 14,5 – для чотиризахідних черв'яків; 16; 18; 20; 23; 25; 29 – для двозахідних черв'яків; 32; 36; 40; 46; 50; 58 – для однозахідних черв'яків.

Слід відзначити, що точно реалізувати задане передаточне відношення привода неможливо через необхідність прийняття стандартних діаметрів шківів, цілого числа зубців зірочок та зубчастих коліс і т.ін. Тому остаточне передаточне відношення привода визначається після розрахунків усіх його передач. Різниця між остаточним і заданим передаточними відношеннями привода зумовлює деяку зміну швидкості приводної ланки машини. Цю швидкість теж треба уточнити після розрахунків передач.

### **8.7. Потужність, моменти і частоти обертання на валах привода**

Для розрахунку будь-якої передачі необхідно й достатньо знати потужність і частоти обертання на ведучому й веденому валах передачі. Часто при розрахунках передач використовують обертальні моменти. Тому для отримання вихідних даних для розрахунків передач визначають потужності, частоти обертання та обертальні моменти на всіх валах привода.

Вибір розрахункового навантаження передач залежить від призначення привода та режиму його роботи.

Якщо привод проектується для роботи із заданим режимом навантаження з обумовленим максимальним довгочасно діючим навантаженням, то це навантаження приймають за розрахункове для передач привода. Тоді номінальна потужність двигуна може бути дещо більшою від необхідної і двигун буде недовантаженим. Так само діють і в тому випадку, коли розрахунок виконують для найважчого для передач режиму – з постійним навантаженням.

У цих випадках визначення вихідних даних починають з привода вала. Потужність  $P_{вч}$ , обертальний момент  $T_{вч}$  і частоту обертання  $n_{вч}$  кожного ведучого вала при відомих параметрах  $P_{вн}$ ,  $T_{вн}$ ,  $n_{вн}$  веденого вала визначають за формулами

$$P_{вч} = \frac{P_{вн}}{\eta_k};$$

$$T_{вч} = \frac{T_{вн}}{u_k \cdot \eta_k};$$

$$n_{вч} = n_{вн} \cdot u_k,$$

де  $u_k$ ,  $\eta_k$  – відповідно передаточне число і ККД передачі, що зв'язує ці вали.

Розрахунок проводять послідовно до вала електродвигуна. Розрахунок виконано правильно, якщо потужність на валу  $I$  дорівнює розрахунковій потужності двигуна, частота обертання вала  $I$  дорівнює частоті  $n_{дв}$  обертання ротора двигуна, а момент на валу  $I$  дорівнює моменту, визначеному за формулою  $T = 9550 P_{дв} / n_{дв}$ .

Слід враховувати, що споживач може завантажити передачу до повного використання номінальної потужності двигуна. У цьому випадку розрахунок передач треба виконувати за навантаженнями, що визначаються номінальною потужністю двигуна. Тоді розрахунок починають з вала електродвигуна. Потужність, обертальний момент і частоту обертання кожного веденого вала при відомих параметрах ведучого вала визначають за формулами

$$P_{вн} = P_{вч} \cdot \eta_k;$$

$$T_{вн} = T_{вч} \cdot i_k \cdot \eta_k;$$

$$n_{вн} = \frac{n_{вч}}{u_k}.$$

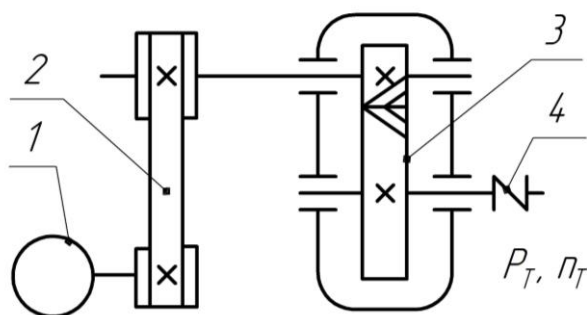
Розрахунок проводять послідовно до приводного вала машини.

На рис. 8.1...8.6 зображено типові схеми завдань на проектування привода (варіанти кінематичних схем приводів і завдання для їх розрахунку).

## ТИПОВІ СХЕМИ ЗАВДАНЬ НА ПРОЕКТУВАННЯ ПРИВОДА

### ЗАВДАННЯ 1

#### ПРИВОД ДО БІГУНКОВОГО МЛИНА ДЛЯ РОЗМЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



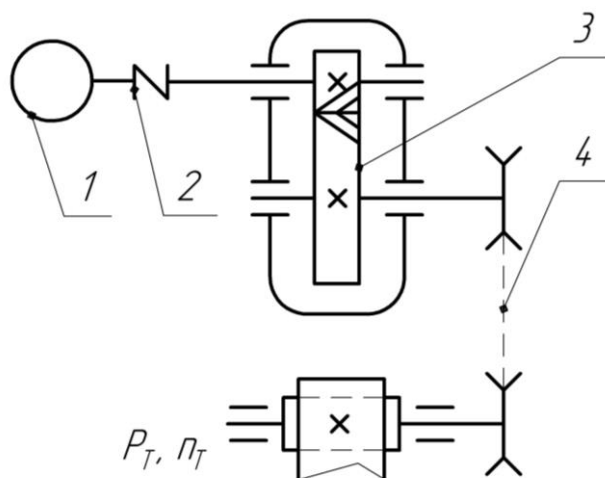
1 – електродвигун; 2 – пасова передача; 3 – редуктор; 4 – муфта.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	1,5	110	25000	2	II	150	Плоскопасова
2	4,0	130					Плоскопасова
3	3,0	100					Плоскопасова
4	2,5	120					Клинопасова
5	8,0	125					Клинопасова
6	3,8	135					Клинопасова
7	6,3	145					Плоскопасова
8	10,0	115					Клинопасова
9	7,0	150					Клинопасова
10	11,5	140					Клинопасова

Рисунок 8.1

## ЗАВДАННЯ 2

### ПРИВОД ДО СТРІЧКОВОГО ТРАНСПОРТЕРА ДЛЯ ТРАНСПОРТУВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



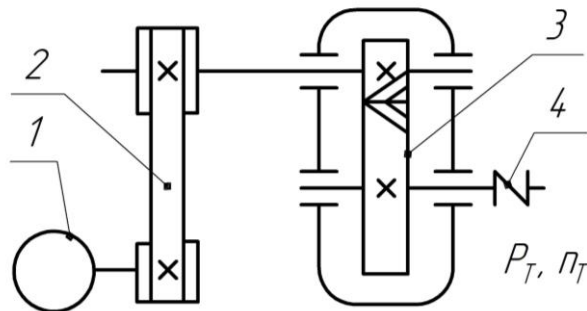
1 – електродвигун; 2 – муфта; 3 – редуктор; 4 – ланцюгова передача.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	3,8	100	25000	2	II	150	Роликова
2	10,0	115					Роликова
3	8,0	140					Втулкова
4	3,0	145					Втулкова
5	6,3	130					Роликова
6	2,5	125					Роликова
7	4,0	160					Втулкова
8	11,5	150					Втулкова
9	1,5	120					Роликова
10	7,0	100					Роликова

Рисунок 8.2

### ЗАВДАННЯ 3

#### ПРИВОД ДО БІГУНКОВОГО МЛИНА ДЛЯ РОЗМЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



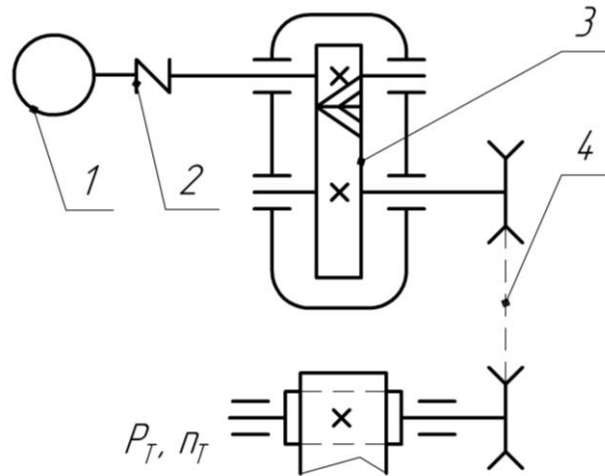
1 – електродвигун; 2 – пасова передача; 3 – редуктор; 4 – муфта.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	5,0	145	25000	2	II	150	Плоскопасова
2	12,0	130					Плоскопасова
3	3,5	100					Плоскопасова
4	6,0	120					Клинопасова
5	9,0	125					Клинопасова
6	12,5	135					Клинопасова
7	3,2	110					Плоскопасова
8	4,2	115					Клинопасова
9	13,0	150					Клинопасова
10	8,5	140					Клинопасова

Рисунок 8.3

### ЗАВДАННЯ 4

#### ПРИВОД ДО СТРІЧКОВОГО ТРАНСПОРТЕРА ДЛЯ ТРАНСПОРТУВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



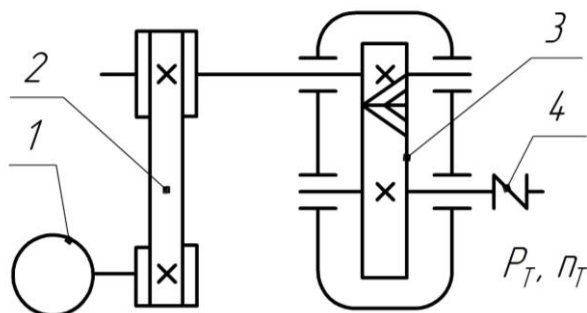
1 – електродвигун; 2 – муфта; 3 – редуктор; 4 – ланцюгова передача.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	8,5	100	25000	2	II	150	Роликова
2	6,5	115					Роликова
3	9,0	140					Втулкова
4	12,0	145					Втулкова
5	3,5	130					Роликова
6	11,0	125					Роликова
7	4,2	160					Втулкова
8	13,5	150					Втулкова
9	7,5	120					Роликова
10	2,0	100					Роликова

Рисунок 8.4

## ЗАВДАННЯ 5

### ПРИВОД ДО БІГУНКОВОГО МЛИНА ДЛЯ РОЗМЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



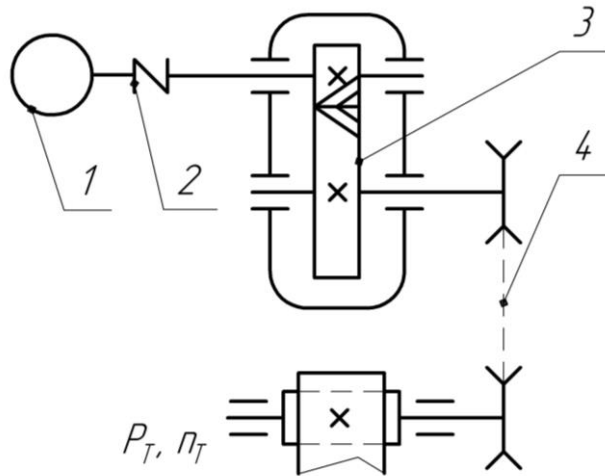
1 – електродвигун; 2 – пасова передача; 3 – редуктор; 4 – муфта.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	14,0	145	25000	2	II	150	Плоскопасова
2	5,5	130					Плоскопасова
3	7,5	100					Плоскопасова
4	10,5	120					Клинопасова
5	6,5	125					Клинопасова
6	9,5	135					Клинопасова
7	2,0	110					Плоскопасова
8	4,5	115					Клинопасова
9	6,8	150					Клинопасова
10	13,5	140					Клинопасова

Рисунок 8.5

### ЗАВДАННЯ 6

#### ПРИВОД ДО СТРІЧКОВОГО ТРАНСПОРТЕРА ДЛЯ ТРАНСПОРТУВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ СУМІШІ



1 – електродвигун; 2 – муфта; 3 – редуктор; 4 – ланцюгова передача.

Варіант	$P_T$ , кВт	$n_T$ , об/хв	Ресурс роботи редуктора, год	Число змін роботи	Режим роботи	Переван- таження, %	Тип передачі
1	4,5	100	25000	2	II	150	Роликова
2	12,5	115					Роликова
3	6,8	140					Втулкова
4	10,5	145					Втулкова
5	5,5	130					Роликова
6	9,5	125					Роликова
7	5,0	160					Втулкова
8	14,0	150					Втулкова
9	6,0	120					Роликова
10	3,2	100					Роликова

Рисунок 8.6



## Приклад енерго-кінематичного розрахунку привода

### 1. ЗАВДАННЯ

Привод до стрічкового транспортера для транспортування  
формульованої суміші

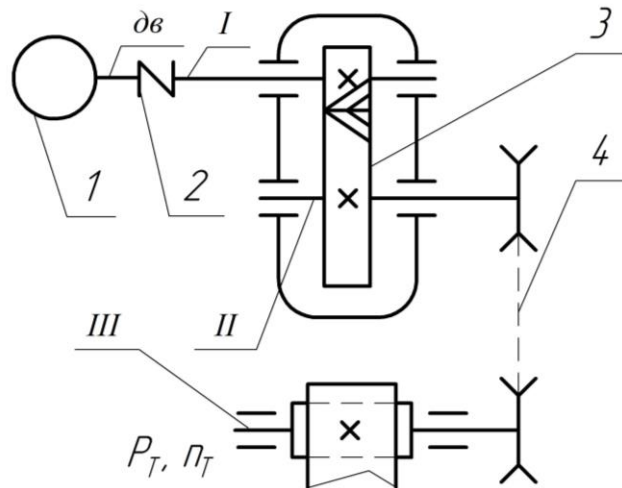


Рисунок 8.7

1 – електродвигун; 2 – муфта (зубчаста); 3 – редуктор;  
4 – ланцюгова передача (втулкова)

Дано

$$P_T = 9 \text{ кВт}; \quad n_T = 140 \text{ об/хв};$$

ресурс роботи редуктора  $L_h = 25\,000$  годин;

режим роботи – II; перевантаження – 150%.

## 2. ВИБІР ЕЛЕКТРОДВИГУНА

### 2.1. Загальний ККД привода.

Визначимо його за формулою

$$\eta_{заг} = \eta_1 \cdot \eta_2^3 \cdot \eta_3,$$

де  $\eta_1$  – ККД пари циліндричних зубчастих коліс,  $\eta_1 = 0,98$  [1, табл. 8.1];

$\eta_2$  – коефіцієнт, що враховує втрати пари підшипників кочення,

$$\eta_2 = 0,99 \text{ [1, табл. 8.1];}$$

$\eta_3$  – ККД ланцюгової передачі,  $\eta_3 = 0,93$  [1, табл. 8.1].

Підставивши дані, отримаємо

$$\eta_{заг} = 0,98 \cdot 0,99^3 \cdot 0,93 = 0,88 \approx 0,9.$$

### 2.2. Необхідна (розрахункова) потужність двигуна.

Визначаємо її за формулою

$$P_{H\partialв} = P_T / \eta_{заг} = 9 / 0,88 = 10,2 \text{ кВт.}$$

### 2.3. Параметри електродвигуна.

З умови  $P_{H\partialв} \leq P_{ном}$  вибираємо електродвигун 4A160S6У3 (ГОСТ 19523-81), номінальна потужність  $P_{ном} = 11$  кВт, номінальна частота обертання ротора  $n_{\partialв} = n_c = 1000$  об/хв, діаметр вала електродвигуна  $d_{\partialв} = d_1 = d_2 = 48$  мм, відношення  $T_{max} / T_{ном} = S = 2,7\%$  [1, додатки 8,9].

Номінальну частоту обертання вала електродвигуна визначимо так:

$$n_{H\partialв} = n_c (1 - 0,027) = 1000 \cdot (1 - 0,027) = 973 \text{ об/хв.}$$

Кутову швидкість вала електродвигуна визначимо за формулою

$$\omega_{\partialв} = \pi \cdot n_{\partialв} / 30 = 3,14 \cdot 973 / 30 = 101,84 \text{ рад/с.}$$

### 3. ПЕРЕДАТОЧНІ ЧИСЛА

#### 3.1. Передаточне число установки.

Загальне передаточне число привода визначимо за формулою

$$u = \omega_{\partial\partial} / \omega_T,$$

де  $\omega_T$  – кутова швидкість тихохідного вала привода, визначимо її за формулою

$$\omega_T = \pi \cdot n_T / 30 = 3,14 \cdot 140 / 30 = 14,65 \text{ рад/с.}$$

Тоді

$$u = 101,84 / 14,65 = 6,95.$$

Розбиваємо загальне передаточне число на ступені привода. Передаточне число для редуктора згідно зі стандартним рядом (ГОСТ 2185-66) [1]  $u_p = 3,15$ .

Передаточне число ланцюгової передачі визначимо за формулою

$$u_{\text{лн}} = u / u_p = 6,95 / 3,15 = 2,206.$$

#### 3.2. Частоти обертання й кутові швидкості валів привода.

Визначимо частоти обертання й кутові швидкості валів привода:

– тихохідний вал ланцюгової передачі, вал III

$$n_3 = n_T = 140 \text{ об/хв};$$

$$\omega_3 = \omega_T = 14,65 \text{ рад/с};$$

– тихохідний вал редуктора, вал II

$$n_2 = n_3 \cdot u_{\text{лн}} = 140 \cdot 2,206 = 308,8 \text{ об/хв};$$

$$\omega_2 = \omega_3 \cdot u_{\text{лн}} = 14,65 \cdot 2,206 = 32,3 \text{ рад/с};$$

– швидкохідний вал редуктора, вал I

$$n_1 = n_2 \cdot u_p = 308,8 \cdot 3,15 = 972,7 \approx 973 \text{ об/хв};$$

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot u_p = 32,3 \cdot 3,15 = 101,8 \text{ об/хв};$$

Перевірка: частота обертів на валу електродвигуна

$$n_{\partial\partial} = n_1 = 973 \text{ об/хв};$$

$$\omega_{\partial\partial} = \omega_1 = 101,8 \text{ рад/с.}$$

3.3. Обертальні моменти на валах привода.

Визначимо їх у такій послідовності:

– на тихохідному валу ланцюгової передачі, вал III

$$T_3 = \frac{9550 P_T}{n_T} = \frac{9550 \cdot 9}{140} = 614 \text{ Нм} = 614 \cdot 10^3 \text{ Нмм};$$

або

$$T_3 = \frac{P_T}{\omega_T} = \frac{9 \cdot 10^3}{14,65} = 614 \text{ Нм} = 614 \cdot 10^3 \text{ Нмм};$$

– на валу колеса (тихохідному валу редуктора), вал II

$$T_2 = \frac{T_3}{u_{\text{лн}} \cdot \eta_3 \cdot \eta_2} = \frac{614}{2,206 \cdot 0,93 \cdot 0,99} = 302 \text{ Нм} = 302 \cdot 10^3 \text{ Нмм};$$

– на валу шестерні (швидкохідному валу редуктора), вал I

$$T_1 = \frac{T_2}{u_p \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2} = \frac{302}{3,15 \cdot 0,98 \cdot 0,99^2} = 100 \text{ Нм} = 100 \cdot 10^3 \text{ Нмм.}$$

Перевірка: обертальний момент на валу електродвигуна

$$T_{\partial\partial} = \frac{P_{H \partial\partial}}{\omega_{\partial\partial}} = \frac{10,2 \cdot 10^3}{101,84} = 100 \text{ Нм}$$

або

$$T_{\partial\partial} = \frac{9550 P_{\partial\partial}}{n_{\partial\partial}} = \frac{9550 \cdot 10,2}{973} = 100 \text{ Нм.}$$

Отже,  $T_{\partial\partial} = T_1 = 100 \text{ Нм.}$

## Перелік використаної та рекомендованої літератури

1. Баласанян Р.А. Атлас деталей машин /Р.А. Баласанян. – Харьков, 1996.
2. Боков В.Н. Детали машин: атлас конструкций /В.Н. Боков, Д.В. Чернилевский, П.П. Будько. – М.: Машиностроение, 1983. – 575с.
3. Довбуш А.Д., Хомик Н.І. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання курсової роботи. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. І.Пулюя, 2014. – 191 с.
4. Дунаев П.Ф. Детали машин: курсовое проектирование /П.Ф. Дунаев, О.П. Леликов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400с.
5. Иосилевич Г.Б. Прикладная механика /Г.Б. Иосилевич и др. – М.: Высшая школа, 1989.
6. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов /Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1986. – 352с.
7. Заблонский К.И. Прикладная механика /К.И. Заблонский и др. – М.: Высшая школа, 1989.
8. Мазоренко Д.І. Деталі машин і основи конструювання: методичний посібник до курсового проекту. Частина І /Д.І. Мазоренко, А.В. Міняйло. – Харків: ХДТУСГ, 1999. – 30с.
9. Мазоренко Д.І. Деталі машин і основи конструювання: методичний посібник до курсового проекту. Частина ІІ /Д.І. Мазоренко, А.В. Міняйло. – Харків: ХДТУСГ, 2000. – 30с.
10. Опір матеріалів; за ред. С.Е. Гарфа. – К.: Вища школа, 1972. – 230с.
11. Опір матеріалів; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 1974. – 304с.
12. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності; за заг. ред. В.Т. Піскунова: у 2ч., 5 кн. – К.: Вища школа, 1995.
13. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник /В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дашенка. – Одеса: ВМВ, 2009. – 316с.
14. Павлице В.Г. Основи конструювання та розрахунок деталей машин /В.Г. Павлице. – Львів: в-во Львівського університету, 1993. – 555с.
15. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики /С.М. Тарг. – М.: Наука, 1974.
16. Технічна механіка /О.О. Ердеді, І.В. Аникін, Ю.О. Медведєв, О.С. Чуйков. – К.: Вища школа, 1983. – 368с.
17. Техническая механика /А.А. Эрдеди, И.В. Аникин, Ю.А. Медведєв, А.С. Чуйков. – М.: Высшая школа, 1980. – 446с.
18. Хомик Н.І. Технічна механіка: навчально-методичний посібник до курсової роботи /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль, 2013. – 192с.
19. Хомик Н.І. Технічна механіка: курс лекцій /Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль, 2011. – 208с.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

(повна назва вищого навчального закладу)

Технічної механіки та сільськогосподарських машин

(повна назва кафедри, циклової комісії)

## ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

з Технічної механіки

(назва дисципліни)

Студента (ки) 2 курсу ЕТ-21 групи

\_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

спеціальності 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”

Керівник \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала \_\_\_\_\_  
Кількість балів \_\_\_\_\_ Оцінка: ECTS \_\_\_\_\_

м. Тернопіль - 202   рік

## ЗМІСТ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

### Частина 1

Розрахунок елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість	3
Задача №1. Визначення реакцій опор балки.....	3
Задача №4. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу й стиску.....	5
Задача №5. Розрахунок вала на кручення.....	8
Задача №7. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах.....	11
Задача №8. Розрахунок на стійкість стисненого стержня.....	14
Задача №9. Визначення стріли провисання електропроводу...	16

### Частина 2

Енерго-кінематичний розрахунок привода	18
1. ЗАВДАННЯ .....	19
2. ВИБІР ЕЛЕКТРОДВИГУНА.....	20
2.1. Загальний ККД привода.....	20
2.2. Необхідна (розрахункова) потужність двигуна.....	20
2.3. Параметри двигуна.....	20
3. ПЕРЕДАТОЧНІ ЧИСЛА.....	21
3.1. Передаточне число установки.....	21
3.2. Частоти обертання й кутові швидкості валів привода.....	21
3.3. Обертальні моменти на валах привода.....	21
Перелік посилань	22

					ІЗ ТМ 19-177.00.00			
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	Зміст індивідуального завдання	Літ.	Арк.	Аркшів
Розроб.		Антонюк В.І						
Перевір.		Цепенюк М.І.					2	1
Консульт.						ФПТ, гр. ЕТ-21		
Н. контр.								
Затв.								

### ЗАДАЧА 4

#### Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого перетину (рис. 4.1) визначити положення головних центральних осей; головні центральні моменти інерції та осьові моменти опору відносно головних центральних осей, якщо двотавр №33.

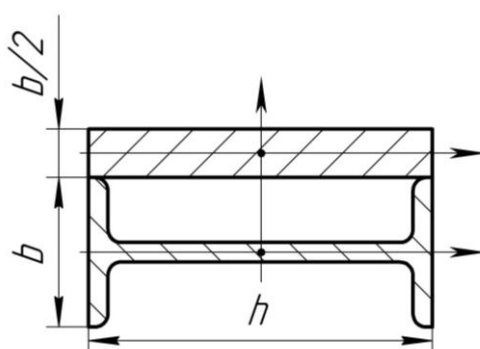


Рисунок 4.1

					ІЗ ТМ 19-177.00.00				
Зм.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів	Літ.	Арк.	Архівів	
Розроб.		Антонюк В.І.							
Перевір.		Цепенюк М.І.					9	4	
Консульт.						ФПТ, гр. ЕТ-21			
Н. контр.									
Затв.									



**Розв'язування задачі 4**

Геометричні характеристики вказаного прокатного профілю виписуємо з таблиць сортаменту ГОСТ 8239-89 [1, додаток б]. Для двотавра № 33 позначаємо їх індексом 1.

$$h_1 = 330 \text{ мм}; \quad b_1 = 140 \text{ мм}; \quad d_1 = 7,0 \text{ мм}; \quad t_1 = 11,2 \text{ мм};$$

$$A_1 = 53,8 \text{ см}^2; \quad I_{X1} = 419 \text{ см}^4; \quad I_{Y1} = 9840 \text{ см}^4.$$

Визначаємо геометричні характеристики полоси, позначимо їх індексом 2. Розміри полоси

$$b_2 = h_1 / 4 = 330 / 4 = 82,5 \text{ мм}; \quad a_2 = h_1 = 330 \text{ мм}.$$

Площа поперечного перетину полоси

$$A_2 = b_2 \cdot a_2 = 8,25 \cdot 33 = 272 \text{ см}^2.$$

Осьові моменти інерції полоси

$$I_{X2} = \frac{a_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{33 \cdot 8,25^3}{12} = 1544 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y2} = \frac{b_2 \cdot a_2^3}{12} = \frac{8,25 \cdot 33^3}{12} = 24706 \text{ см}^4.$$

Викреслюємо перетин у масштабі (рис. 4.2).

Координати центра ваги перетину в системі координат  $X_1Y_1$ :

$$x_C = 0, \quad \text{тому, що вісь } Y \text{ є віссю симетрії};$$

$$y_C = \frac{\sum S_{X1}}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A_1 + A_2},$$

де  $y_{C1}$  – відстань (координата) від центра ваги площі першої фігури перетину (двотавра) до осі  $X_1$ ,  $y_{C1} = 0$ ;

					ІЗ ТМ 19-177.00.00	Арк.
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підпис	Дата		10

## Закінчення додатка 4

$y_{C2}$  – відстань (координата) від центра ваги площі другої фігури перетину (полоси) до осі  $X_1$

$$y_{C2} = \frac{140}{2} + \frac{82,5}{2} = 111,25 \text{ мм.}$$

Підставимо значення й отримаємо

$$y_C = \frac{0 + 272 \cdot 111,25}{53,8 + 272} = 92,9 \text{ мм.}$$

Проводимо через точку  $C$  головні центральні осі  $XU$  (див. рис. 4.2).

Визначаємо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей, тобто головні центральні моменти інерції заданого перетину

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} = 9840 + 24706 \approx 34600 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_X &= I_{X1} + A_1 \cdot (-9,29)^2 + I_{X2} + A_2 \cdot (1,835)^2 = \\ &= 419 + 53,8 \cdot (-9,29)^2 + 1544 + 272 \cdot 1,835^2 \approx 5980 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Визначаємо осьові моменти опору відносно головних центральних осей

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{5980}{16,29} = 367 \text{ см}^3;$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{x_{\max}} = \frac{34600}{16,5} = 2097 \text{ см}^3,$$

де  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$  – координати точок заданого перетину, максимально віддалених від осей  $X$  та  $Y$  (див. рис. 4.2):

$$y_{\max} = 9,29 + 7 = 16,29 \text{ см;}$$

$$x_{\max} = 16,5 \text{ см.}$$

					ІЗ ТМ 19-177.00.00	Арк.
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підпис	Дата		11

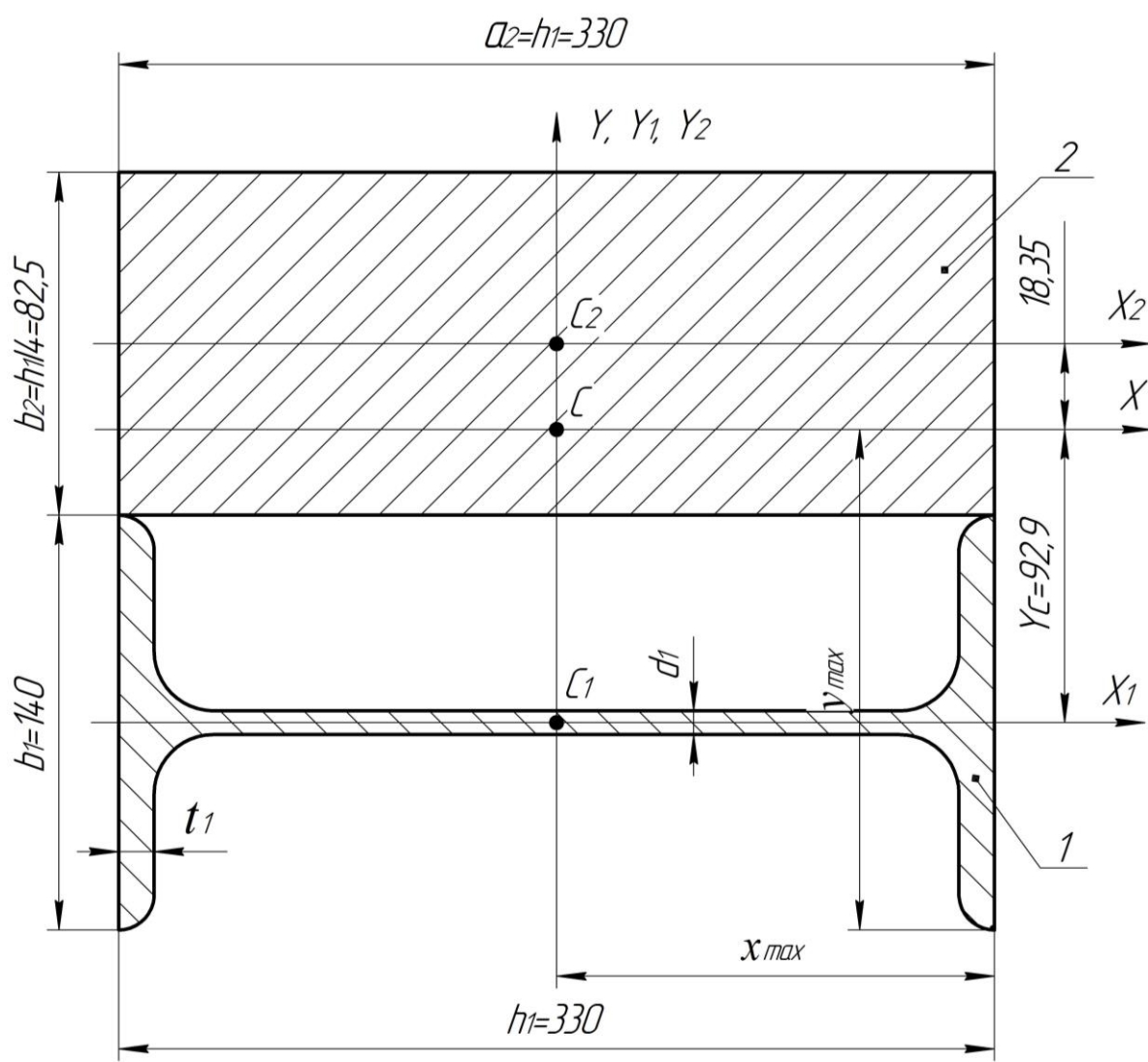
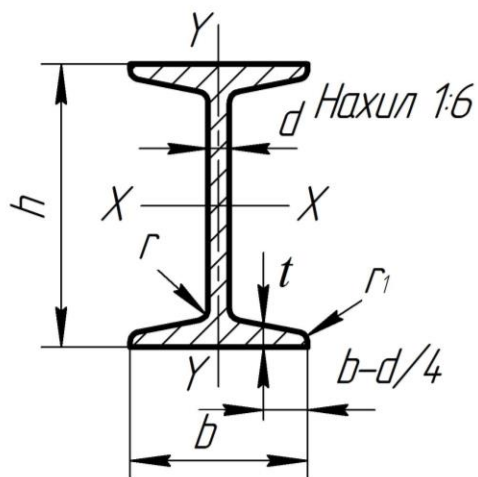


Рисунок 4.2

					ІЗ ТМ 19-177.00.00	Арк.
Зм.	Арк.	№ док.ум.	Підпис	Дата		12

## Додаток 6



Сталь прокатна. **Балки двотаврові.** Сортамент. ГОСТ 8239-89

Но- мера про- філю	Розміри				Площа перетину  А, см <sup>2</sup>	Довідкові величини для осей						
						$x - x$				$y - y$		
	$h$	$b$	$d$	$t$		$I_X$	$W_X$	$i_X$	$S_X$	$I_Y$	$W_Y$	$i_Y$
	мм					см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	665	85,9	3,05
45	450	160	6,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	500	170	9,5	15,2	97,3	39120	1560	20,1	899	1040	122	3,28
55	550	180	10,0	16,5	113	54810	1990	22,0	1150	1350	150	3,46
60	600	190	10,8	17,8	131	75010	2500	23,9	1440	1720	181	3,62

## Додаток 7

Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження

Гнучкість бруса $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст.ОС, Ст.2, Ст.3, Ст.4	Сталь Ст.5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

## Додаток 8

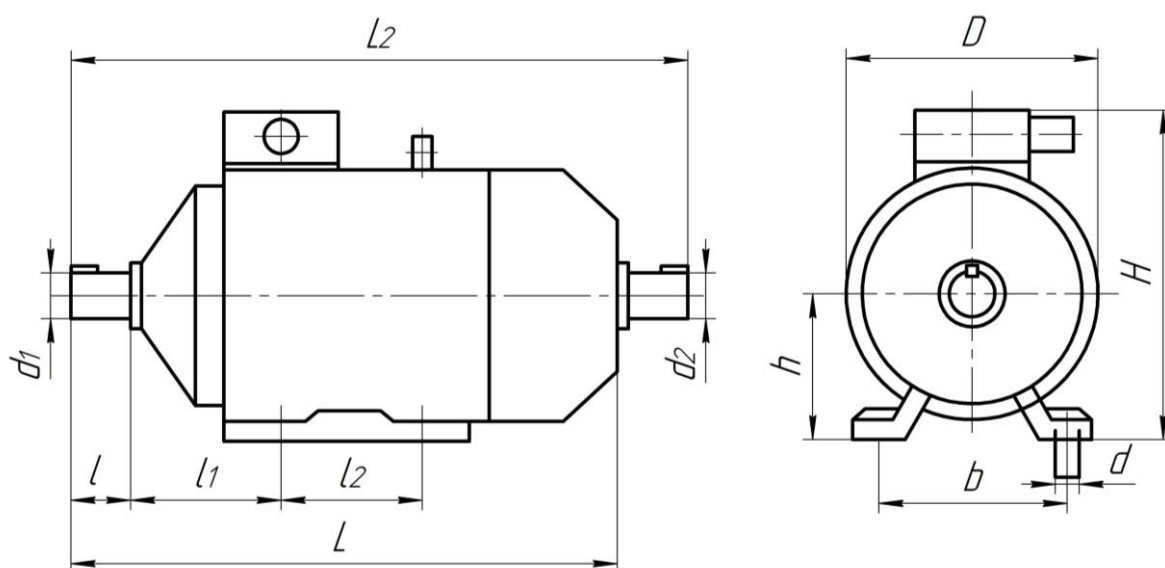
### Електродвигуни асинхронні трифазні єдиної серії 4А закриті обдувні

Типорозмір двигуна	Номі- нальна потуж- ність $P_{ном}$ , кВт	Частота обертання ротора, $n_{дв}$ , об/хв	$\frac{T_{max}}{T_{ном}}$ %	Типорозмір двигуна	Номі- нальна потуж- ність $P_{ном}$ , кВт	Частота обертання ротора, $n_{дв}$ , об/хв	$\frac{T_{max}}{T_{ном}}$ %
Синхронна частота обертання 3000 об/хв				Синхронна частота обертання 1500 об/хв			
4A71A2Y3	0,75	2810	2,2	4A71A4Y3	0,75	1390	2,2
4A71B2Y3	1,1	2810	2,2	4A80A4Y3	1,1	1420	2,2
4A80A2Y3	1,5	2850	2,6	4A80B4Y3	1,5	1415	2,2
4A80B2Y3	2,2	2870	2,6	4A90L4Y3	2,2	1425	2,4
4A90L2Y3	3,0	2870	2,5	4A100S4Y3	3,0	1436	2,4
4A100S2Y3	4,0	2880	2,5	4A100L4Y3	4,0	1430	2,4
4A100L2Y3	5,5	2880	2,5	4A112M4Y3	5,5	1445	2,4
4A112M2Y3	7,5	2900	2,8	4A132S4Y3	7,5	1455	3,0
4A132M2Y3	11,0	2920	2,8	4A132M4Y3	11,0	1460	3,0
4A160S2Y3	15,0	2940	2,2	4A160S4Y3	15,0	1465	2,3
4A160M2Y3	18,5	2940	2,2	4A160M4Y3	18,5	1465	2,3
4A180S2Y3	22	2945	2,5	4A180S4Y3	22	1470	2,3
4A180M2Y3	30	2945	2,5	4A180M4Y3	30	1470	2,3
4A200M2Y3	37	2945	2,5	4A200M4Y3	37	1475	2,5
Синхронна частота обертання 1000 об/хв				Синхронна частота обертання 750 об/хв			
4A71A6Y3	0,75	915	2,2	4A90A8Y3	0,75	700	1,9
4A80B6Y3	1,1	920	2,2	4A90B8Y3	1,1	700	1,9
4A90L6Y3	1,5	935	2,2	4A100L8Y3	1,5	700	1,9
4A100L6Y3	2,2	950	2,2	4A112MA6Y3	2,2	700	2,2
4A112MA6Y3	3,0	955	2,5	4A112MB8Y3	3,0	700	2,2
4A112MB6Y3	4,0	960	2,5	4A132S8Y3	4,0	720	2,6
4A132S6Y3	5,5	965	2,5	4A132M8Y3	5,5	720	2,6
4A132M6Y3	7,5	970	2,5	4A160S8Y3	7,5	730	2,2
4A160S6Y3	11,0	975	2,0	4A160M8Y3	11,0	730	2,2
4A160M6Y3	15,0	975	2,0	4A180M8Y3	15,0	730	2,0
4A180M6Y3	18,5	975	2,0	4A200M8Y3	18,5	735	2,2
4A200M6Y3	22	975	2,4	4A200L8Y3	22	730	2,0
4A200L6Y3	30	980	2,4	4A225M8Y3	30	735	2,1
4A225M6Y3	37	980	2,3	4A250S8Y3	37	735	2,0

## Додаток 9

Основні розміри електродвигунів типу 4А основного виконання (УЗ), мм

Тип	Число полюсів	$L$	$H$	$D$	$d_1(d_2)$	$d$	$l$	$l_1$	$l_2$	$b$	$h$
4A71	2,4,6	285	210	170	19	7	40	45	90	112	71
4A80A	2,4,6,8	300	218	186	22	10	50	50	100	125	80
4A80B		320	218	186	22	10	50	50	100	125	80
4A90L		350	243	208	24	10	50	56	125	140	90
4A100S		365	265	235	28	12	60	63	112	160	100
4A100L		395	280	235	28	12	60	63	140	160	100
4A112M		452	310	260	32	12	80	70	140	190	112
4A132S	4,6,8	480	350	302	32	12	80	89	140	216	132
4A132M	2,4,6,8	530	350	302	38	12	90	89	178	216	132
4A160S	2	624	430	358	42	15	110	108	178	254	160
	4,6,8	624	430	358	48	15	110	108	178	254	160
4A160M	2	667	430	358	42	15	110	108	210	254	160
	4,6,8	667	430	358	48	15	110	108	210	254	160
4A180S	2	682	470	410	48	15	110	121	203	278	180
	4,6,8	682	470	410	55	15	110	121	203	279	180
4A180M	2	702	470	410	48	15	110	121	241	279	180
	4,6,8	702	470	410	55	15	110	121	241	279	180
4A200M	2	760	535	450	55	19	110	133	257	318	200
	4,6,8	790	535	450	60	19	140	133	257	318	200
4A200L	2	800	535	450	55	19	110	133	305	318	200
	4,6,8	830	535	450	60	19	140	133	305	318	200
4A225M	2	810	575	494	55	19	110	149	311	356	225
	4,6,8	840	575	494	65	19	140	149	311	356	225
4A250S	2	915	640	554	65	24	140	168	311	406	250
	4,6,8	915	640	554	75	24	140	168	311	406	250
4A250M	2	915	640	554	65	24	140	168	349	406	250
	4,6,8	915	640	554	75	24	140	168	349	406	250



**Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя**

**Кафедра технічної механіки та сільськогосподарських машин**

**Хомик Надія Ігорівна  
Довбуш Анатолій Дмитрович  
Цепенюк Михайло Іванович  
Бабій Андрій Васильович**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

## **НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК**

для практичних та індивідуальних занять  
(самостійної роботи)

Комп'ютерний набір: Наталія Антончак

Графічне оформлення: Назар Олендер, Богдан Блащак

Наклад 50 прим.